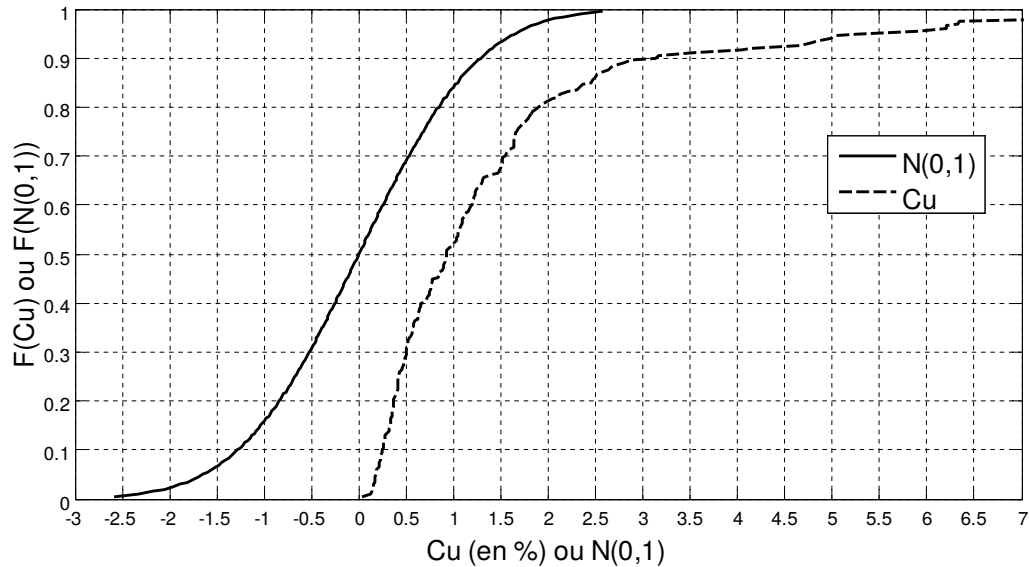


Question 1 (11 points) – Simulation Séquentielle Gaussienne

On effectue une simulation des teneurs de Cu (en %) d'un gisement par méthode séquentielle gaussienne (SGS). La teneur en Cu n'étant pas distribuée suivant une loi normale, on doit au préalable procéder à une transformation gaussienne (voir figure).



5pts a) À une certaine itération, on obtient au point x_0 une valeur krigée de -0.25 et un écart-type de krigeage de 0.73 . On appelle un générateur de nombres aléatoires (distribution uniforme entre 0 et 1) afin d'échantillonner la distribution obtenue par krigeage. Celui-ci retourne la valeur 0.40 . Quelle valeur gaussienne la méthode SGS simulera au point x_0 ?

2pts b) Quelle teneur de Cu sera simulée en ce même point ?

Question 1 (suite)

2pts c) Lorsque le nombre de données simulées est prohibitif, la méthode séquentielle gaussienne (SGS) devient inapplicable. Pourquoi ?

2pts d) Proposez une solution rapide afin de rendre applicable la méthode SGS à un très grand nombre de données simulées?

Question 2 (10 points) – Méthode de Cholesky (LU)

On veut simuler une variable Z en trois points distincts (cas stationnaire) par méthode de Cholesky. On a construit la matrice de covariance K et effectué la décomposition $K=LL'$. Les emplacements sont placés dans l'ordre 1, 2, 3 dans la matrice de covariance. La matrice L obtenue est la suivante :

$$L = \begin{bmatrix} 2.2361 & 0 & 0 \\ 1.3416 & 1.7889 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

2pts a) Quelle est la variance des Z ?

2pts b) Quelle est la covariance entre Z_2 et Z_3 ?

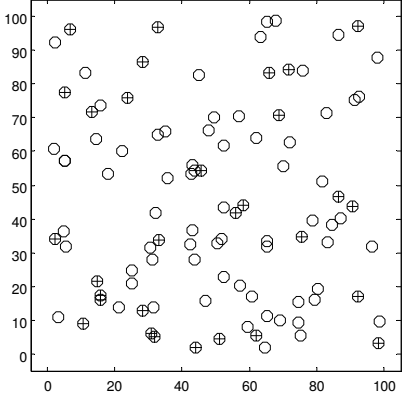
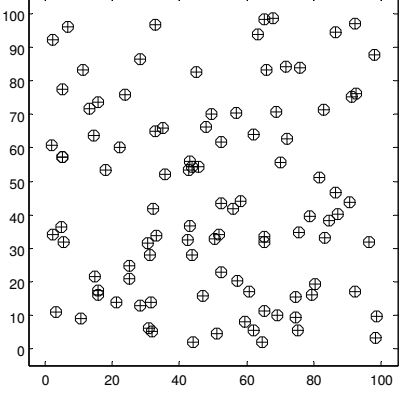
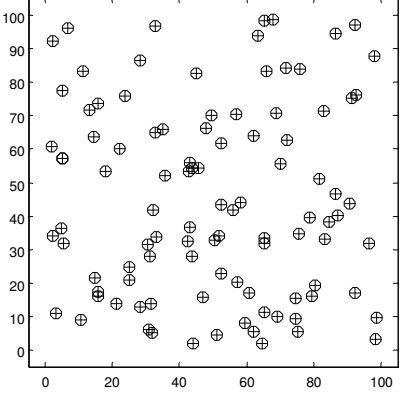
2pts c) On tire d'une $N(0,1)$ le vecteur de valeurs aléatoires $Y=[Y_1 \ Y_2 \ Y_3]=[-1.87 \ 0.93 \ -0.59]$. Quelle est la valeur simulée pour Z_3 ?

2pts d) On a observé $Z_1=2$. Que devient la covariance (conditionnelle) entre Z_2 et Z_3 sachant cela ?

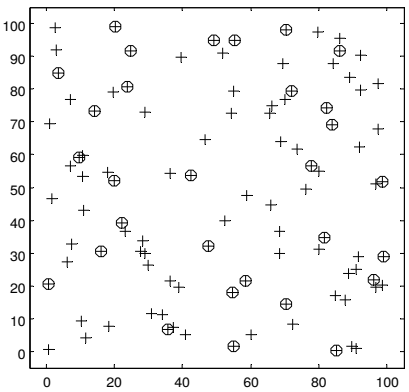
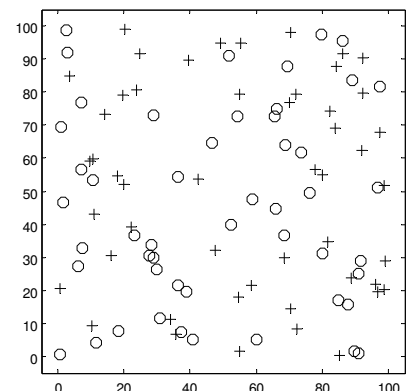
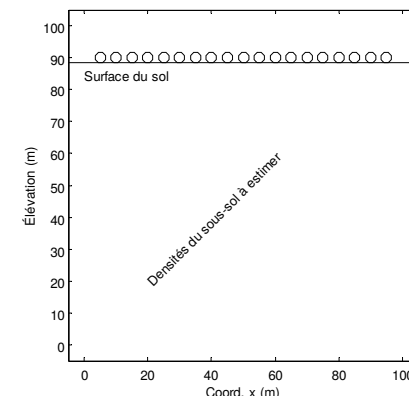
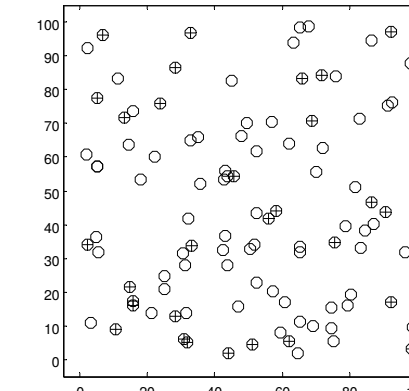
2pts e) Quelle valeur de Y_1 doit-on simuler pour rendre la simulation conditionnelle ?

Question 3 (21 points) – Admissibilité et Utilité du Cokrigage

Chaque cas (A à G) présente le modèle de covariance et la localisation des données. Z est la variable principale (les +) et Y la variable secondaire (les o). (Note : si $|h| = 0$, et 0 si $|h| > 0$)

Cas	Modèle de covariance	Localisation
A	Modèle linéaire de corégionalisation $C(h) = \text{Sphér. (a=50 m)}$	
B	$Z(x,y)$ a un variogramme de type gaussien , $a_{\text{effectif}} = 100 \text{ m}$. $Y(x,y) =$ les covariances $C_{YY}(h)$ et $C_{ZY}(h)$ sont calculées en tenant compte de cette relation.	
C	Modèle linéaire de corégionalisation $C(h) = \text{Sphér. (a=50 m)}$	

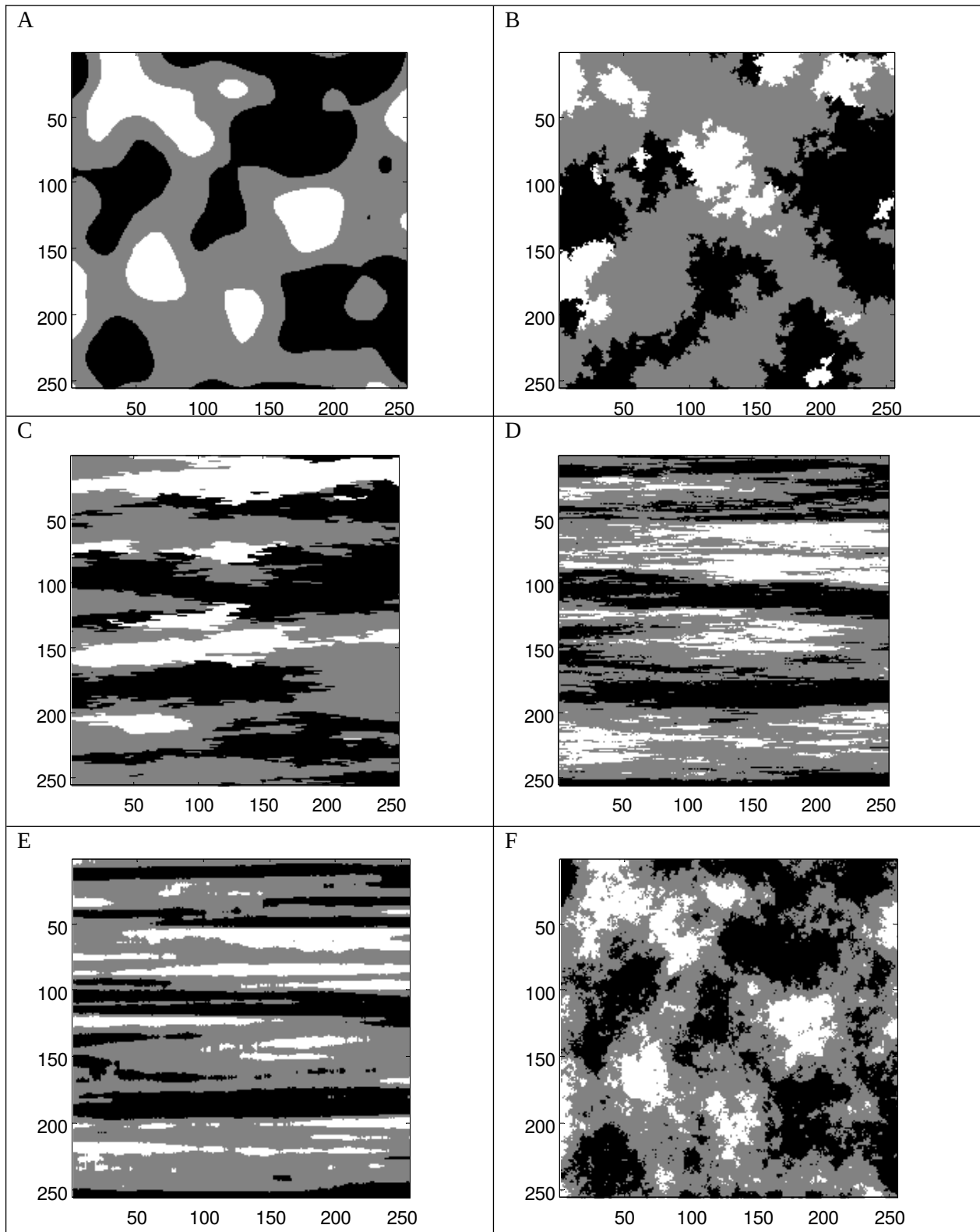
Question 3 (suite)

D	Modèle linéaire de corégionalisation $C(h) = \text{Sphér. (a=75 m)}$	
E	Modèle linéaire de corégionalisation $C(h) = \text{Sphér. (a=75 m)}$	
F	Z est le contraste de densité de blocs (aucune observation) Y est l'anomalie gravimétrique mesurée en surface La relation physique liant la gravité aux densités est entièrement considérée dans le modèle de corégionalisation, c.-à-d. $Y=GZ \Rightarrow C_{YY} = GC_{ZZ}G^T$ et $C_{YZ} = GC_{ZZ}$	
G	$C(h) = \text{Sphér. (a=50 m)}$	

Question 3 (suite)

Complétez le tableau suivant en indiquant O (oui) ou N (non) selon que l'énoncé s'applique ou non au cas considéré (A à G). Vous pouvez apporter des justifications à vos réponses sous le tableau si vous le désirez. Une bonne réponse vaut 0.75 point, une mauvaise réponse vaut -0.25 point et une absence de réponse vaut 0.25 point. Il n'est pas possible d'avoir un pointage inférieur à 0.

	Cas						
Énoncé	A	B	C	D	E	F	G
1) Le modèle de corégionalisation décrit est admissible							
2) Selon le modèle décrit, le cokrigeage devrait améliorer notablement l'estimation par rapport au krigeage (note : pour pouvoir répondre oui, il faut d'abord que le modèle soit admissible)							
3) Indépendamment du modèle décrit et en supposant qu'un modèle admissible soit utilisé, seul le cokrigeage simple peut être effectué. (Note : les moyennes des deux variables sont supposées connues)							
4) Il est possible de calculer le variogramme croisé Z-Y expérimental avec les données indiquées.							

Question 4 (10 points) – Simulation d'Indicatrices et Simulations Gaussiennes Tronquées

Question 4 (suite)

6pts a) Complétez le tableau suivant en marquant d'un X, pour chaque image identifiée de A à F, les énoncés qui s'appliquent. (Aide : chaque colonne doit comporter deux "X" au total : un en haut de la double barre et un en bas de celle-ci)

Énoncé	A	B	C	D	E	F
L'image est obtenue par la méthode de simulation séquentielle d'indicatrices						
L'image est obtenue par la méthode « variable gaussienne tronquée »						
Le variogramme utilisé est gaussien isotrope						
Le variogramme utilisé est sphérique isotrope						
Le variogramme utilisé est gaussien anisotrope						
Le variogramme utilisé est sphérique anisotrope						

4pts b) Dans un modèle gaussien tronqué, quelles proportions de facies F1, F2 et F3 seront simulées théoriquement si l'on adopte les seuils $c_1 = -0.5$ et $c_2 = 0.98$ pour une variable $N(0,1)$ simulée ?

Question 5 (12 points) – Propriétés des Simulations Géostatistiques

On a un champ en 2D de taille G pour lequel on génère un très grand nombre de **simulations non-conditionnelles** sur une grille serrée de points. Les simulations sont effectuées avec moyenne théorique « m » et variance théorique σ^2 .

2pts a) On se place en un point donné x_0 et l'on examine les valeurs obtenues pour les différentes réalisations. Que valent la moyenne et la variance des valeurs simulées en ce point?

2pts b) Pour la 1ère réalisation, on calcule la variance expérimentale sur l'ensemble du domaine. On répète l'exercice pour la 2e réalisation, la 3e et ainsi de suite. Que vaut la moyenne (calculée sur l'ensemble des réalisations) des variances expérimentales obtenues sur chaque réalisation?

2pts c) Pour chaque réalisation, on regroupe les données en blocs de taille V (i.e. on calcule la moyenne des valeurs à l'intérieur du bloc). Pour un bloc donné, quelles seront la moyenne et la variance des teneurs de ce bloc sur l'ensemble des réalisations?

2pts d) Pour la 1ère réalisation, on calcule la variance expérimentale des teneurs des blocs de taille V sur l'ensemble du domaine. On répète l'exercice pour la 2e réalisation, la 3e et ainsi de suite. Que vaut la moyenne (sur les différentes réalisations) des variances expérimentales ainsi obtenues?

Question 5 (suite)

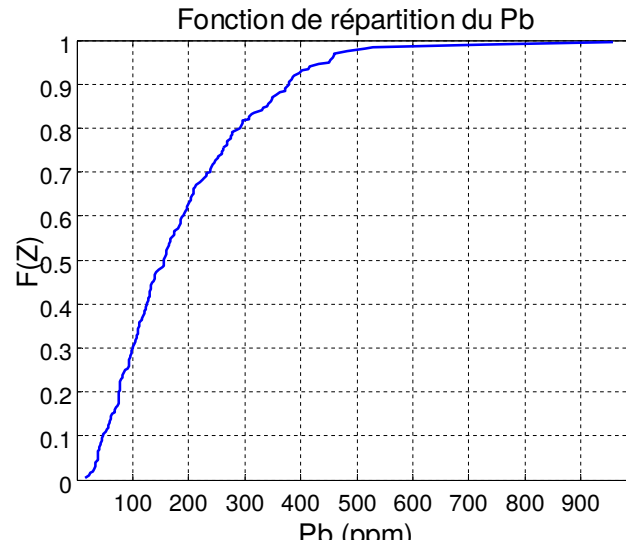
On considère cette fois un très grand nombre de simulations conditionnelles sur une grille très serrée de points.

2pts e) On se place en un point donné x_0 et l'on examine les valeurs obtenues pour les différentes réalisations. Que valent la moyenne et la variance des valeurs simulées en ce point?

2pts f) Pour chaque réalisation, on regroupe les valeurs simulées en blocs de taille V (i.e. on calcule la moyenne des valeurs à l'intérieur du bloc). Pour un bloc donné, quelles seront la moyenne et la variance des teneurs de ce bloc sur l'ensemble des réalisations?

Question 6 (18 points) – Krigeage d'Indicatrices Simple

Un sol de la région de Montréal est contaminé au plomb dû à la présence d'une usine de recyclage de batteries automobiles. Deux cents analyses de la concentration en plomb sont disponibles et la fonction de répartition est illustrée à la figure suivante :



6pts a) Indiquez quels sont les paliers attendus pour les indicatrices correspondant aux seuils suivants : 100 ppm, 200 ppm, et 400 ppm.

2pts b) Quelles sont les unités des variogrammes d'indicatrices ?

Le tableau suivant donne l'emplacement et les valeurs de Pb (en ppm) de 4 observations.

Point	Coord. x (m)	Coord. y (m)	Pb ppm
x ₁	200	400	120
x ₂	600	400	55
x ₃	500	650	253
x ₄	550	450	437

Question 6 (suite)

Le tableau suivant donne les poids obtenus par KI simple pour les divers seuils utilisés lors de l'estimation au point x_0 de coordonnée (500,500); la dernière colonne donne la distance entre les points x_i ($i=1...4$) et le point x_0 :

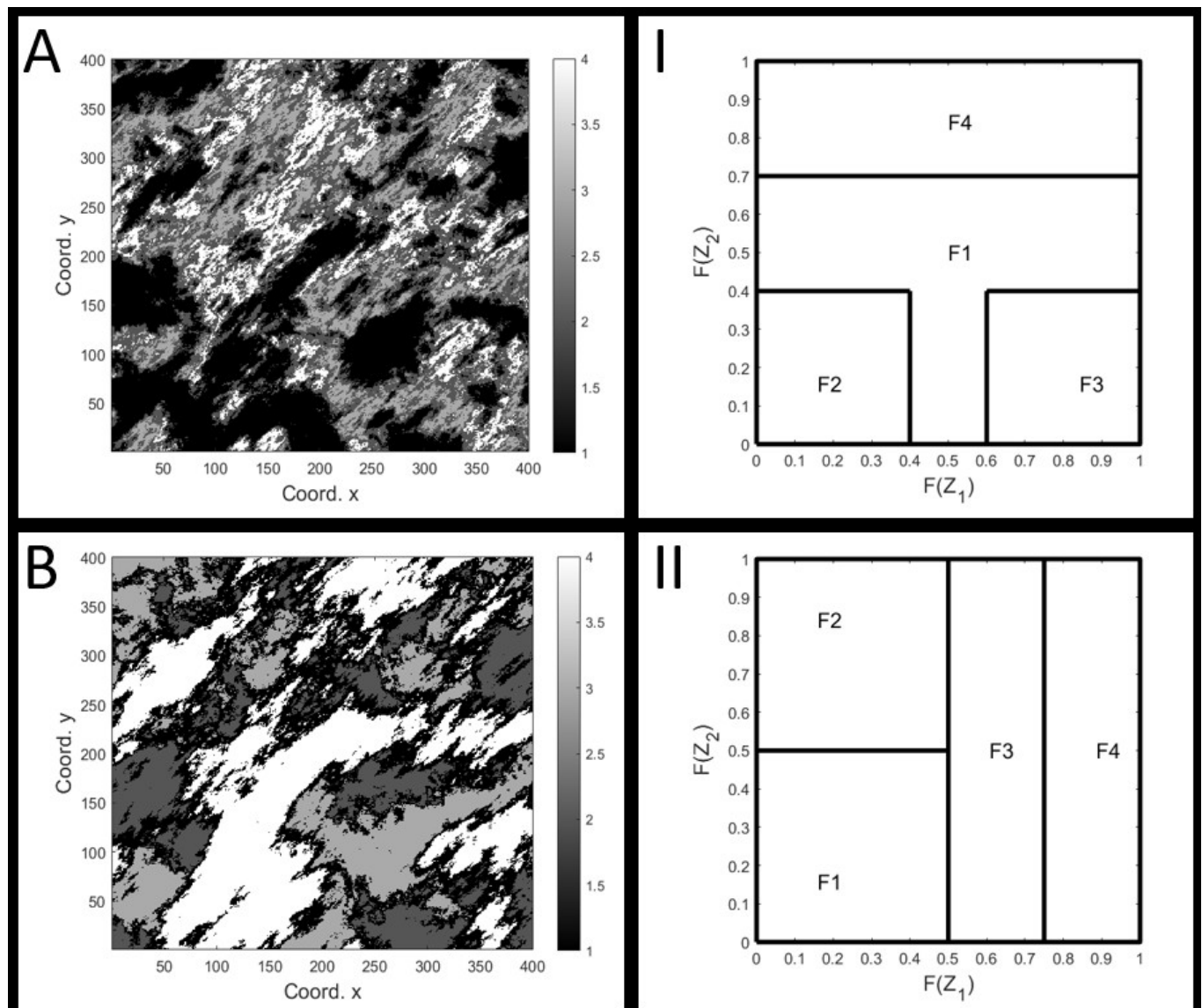
	100 ppm	200 ppm	300 ppm	400 ppm	500 ppm	distance x_i-x_0 (m)
	0	0.08	0	0	0	316.2
	-0.11	-0.04	-0.11	-0.01	0	141.4
	0.22	0.28	0.22	0	0	150
	0.70	0.70	0.70	0.12	0	70.7

6pts c) Quelle est la probabilité (estimée par KI simple) que la concentration au point x_0 soit supérieure à 200 ppm ? (Ne cherchez pas à effectuer les corrections pour relation d'ordre).

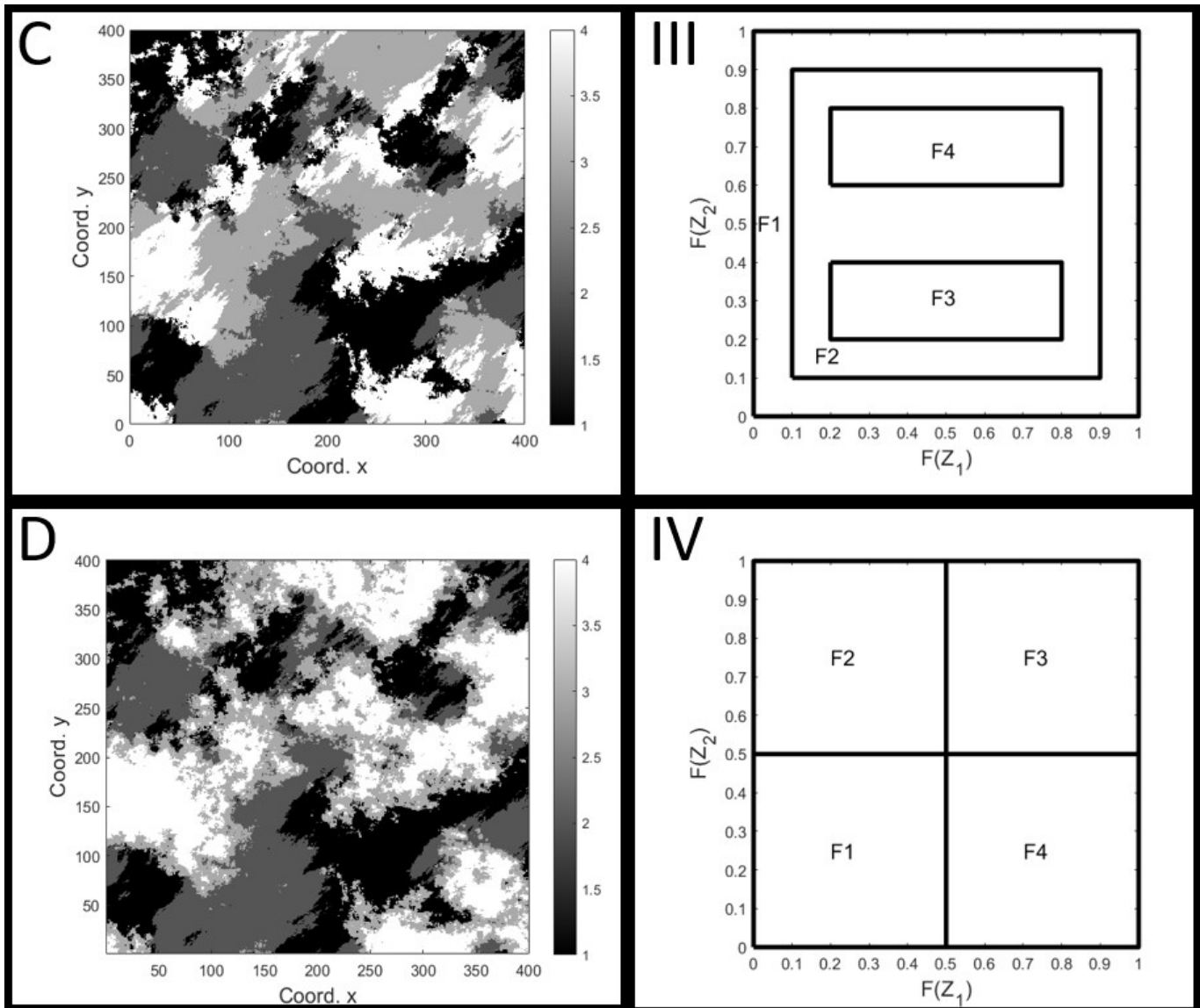
Question 6 (suite)

2pts d) *Que peut-on dire de la portée du variogramme d'indicateur utilisé dans le krigeage pour le seuil 500 ppm?*

2pts e) *L'usine de recyclage est située sur la rue Notre-Dame dans l'est de Montréal. Les camions empruntent principalement cet axe routier orienté sud-ouest nord-est. Les vents dominants au cours de l'année sont aussi orientés sud-ouest nord-est. En quoi ces informations peuvent être utiles lors de la modélisation des variogrammes théoriques d'indicateurs ?*

Question 7 (8 points) – Simulations Plurigaussiennes

Question 7 (suite)



Question 7 (suite)

6pts a) Associez chaque réalisation au drapeau lui correspondant.

Réalisations	A	B	C	D
Drapeau				

2pts b) Le variogramme utilisé est sphérique pour les deux variables. Lequel des énoncés représente la structure spatiale des gaussiennes simulées (justifiez votre choix) :

Énoncé	Type modèle gaussienne 1	Type modèle gaussienne 2
I)	Isotrope ($a=100$ m)	Isotrope ($a=100$ m)
II)	Isotrope ($a=100$ m)	Anisotrope ($ag=150$ m, $ap=50$ m, $\theta g=45^\circ$)
III)	Anisotrope ($ag=150$ m, $ap=50$ m, $\theta g=45^\circ$)	Isotrope ($a=100$ m)
IV)	Anisotrope ($ag=150$ m, $ap=50$ m, $\theta g=45^\circ$)	Anisotrope ($ag=150$ m, $ap=50$ m, $\theta g=45^\circ$)
V)	Isotrope ($a=100$ m)	Anisotrope ($ag=150$ m, $ap=50$ m, $\theta g=135^\circ$)
VI)	Isotrope ($a=150$ m)	Isotrope ($a=50$ m)

θg : azimute de la grande portée, ag : grande portée, ap : petite portée

Question 8 (10 points) – Application de la Géostatistique dans une Étude de Cas Réel

Vous êtes des ingénieurs géologiques travaillant sur l'optimisation de l'exploitation d'une mine à ciel ouvert. Vous disposez de données de forage limitées pour modéliser la distribution spatiale des teneurs en minerai. Votre objectif est de minimiser l'incertitude géologique, c'est-à-dire obtenir une estimation des teneurs des blocs de taille $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m}$, tout en maximisant la rentabilité de l'exploitation ainsi que les bénéfices sociétaux et environnementaux.

En utilisant les méthodes vues en classe, proposez une méthodologie pour répondre aux questions suivantes :

- Comment modéliser la variabilité spatiale des teneurs des blocs de minerai ?
- Comment estimer ou simuler les teneurs des blocs de taille $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m}$?
- Comment déterminer le tonnage et les profits en fonction de la teneur de coupure c ?
- Comment gérer les incertitudes sur le tonnage et les profits ?
- Comment valider vos résultats et justifier leur utilité pour la gestion des risques et les prises de décision ?

Expliquez vos choix méthodologiques et discutez des avantages de votre méthode par rapport aux autres approches étudiées en classe. Vous pouvez répondre par une série de puce (i.e., *bullet point*).

Annexe

Fonction de répartition N(0,1) :										
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Corrigé

Q1-11pts

5pts a) -1pts erreur identification de W de la loi normale, -0.5pts erreur de calcul, -1pts erreur formule

On tire une loi uniforme et on obtient 0.4. On cherche donc la valeur de la loi normale pour une fonction de répartition à 0.4. On obtient par lecture graphique de la table de la loi normale, 0.2533 pour 60%. Le complément, -0.2533, est donc à 40%, donc .

Par la suite,

2pts b) Par lecture sur la figure environ 0.55%

2pts c) Taille de la matrice, inversion de la matrice K. Espace mémoire limité.

2pts d) Il faut utiliser un voisinage. Cela permet de réduire la taille de la matrice à inverser considérablement. Cependant, il faut bien l'identifier, car celui peut avoir des impacts négatifs s'il est mal choisi.

Q2-10pts

2pts a)

2pts b)

2pts c)

2pts d)

2pts e)

Q3- 21pts 0.75pts bonne réponse, 0.25 si vide, -0.25 si erreur

Énoncé	Cas						
	A	B	C	D	E	F	G
Le modèle de corégionalisation décrit est admissible.	O	O	O	O	O	O	N
<u>Selon le modèle décrit</u> , le cokrigeage devrait améliorer notablement l'estimation par rapport au krigeage (note : pour pouvoir répondre oui, il faut d'abord que le modèle soit admissible)	N	O	N	N	O	O	N
Indépendamment du modèle décrit et en supposant qu'un modèle admissible soit utilisé, seul le cokrigeage simple peut être effectué.	N	N	N	N	N	O	N
Il est possible de calculer le variogramme croisé Z-Y expérimental avec les données indiquées.	O	O	O	O	N	N	O

Q4-10pts

a) 0.5pts par crochet bien placé. Sinon 0.

Énoncé	A	B	C	D	E	F
L'image est obtenue par la méthode de simulation séquentielle d'indicateurs		X	X			
L'image est obtenue par la méthode « variable gaussienne tronquée »	X			X	X	X
Le variogramme utilisé est gaussien isotrope	X					
Le variogramme utilisé est sphérique isotrope		X				X
Le variogramme utilisé est gaussien anisotrope					X	
Le variogramme utilisé est sphérique anisotrope			X	X	X	

4pts b) -0.5pts par erreur de calcul, -0.5pts par erreur de lecture loi normale, -1pts erreur formule

Pour $F_1 = P(N(0,1) < -0.5) = 1 - 0.5793 = 0.3085$

Pour $F_2 = P(-0.2 < N(0,1) < 1.1) = 0.8365 - 0.3085 = 0.5279$

Pour $F_3 = P(N(0,1) > 1.1) = 1 - 0.8365 = 0.1635$

Q5-12pts

2pts par bonne réponse. Sinon 0.

a) m et σ^2

b) $D^2(\cdot|G)$

c) m ,

d) $D^2(V|G)$

e) La valeur obtenue par krigeage simple (et la variance de krigeage simple (.

f) La valeur obtenue par krigeage simple de bloc (et la variance de krigeage simple de bloc (.

Q6-18pts

a) 2pts - 100 $\Rightarrow 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$,

2pts - 200 $\Rightarrow 0.64 \cdot 0.36 = 0.23$;

2pts - 400 $\Rightarrow 0.93 \cdot 0.07 = 0.0651$

b) 2pts - Aucune unité

c) 6pts -

En codant 1 si $>200 \Rightarrow 0.28 + 0.7 + (1 - 1.02) \cdot (1 - 0.63) = 0.973$

En codant 1 si $<200 \Rightarrow 1 - [(0.08 - 0.04) + (1 - 1.02) \cdot 0.63] = 0.973$

Q7-10pts

6pts a) III, I, IV, II (1.5pts par bonne association)

4pts b) II

Il y a un champ isotrope et un champ anisotrope. Le champ anisotrope est de grande continuité SO-NE ($\alpha_g=45$). Avec ces informations, on peut déjà déduire qu'il s'agit soit de II ou III. Il faut maintenant regarder le champ D avec le patron II. On observe que Z1 contrôle le faciès 3 et 4 qui ont une texture isotrope. Alors, la réponse est II.

Q8-12pts