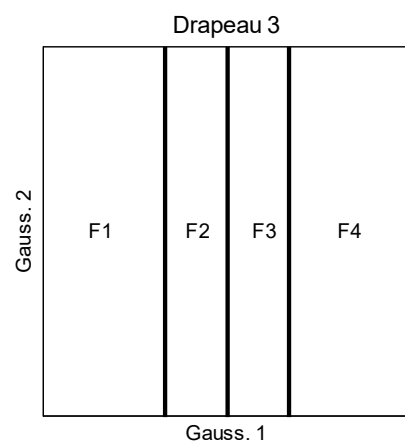
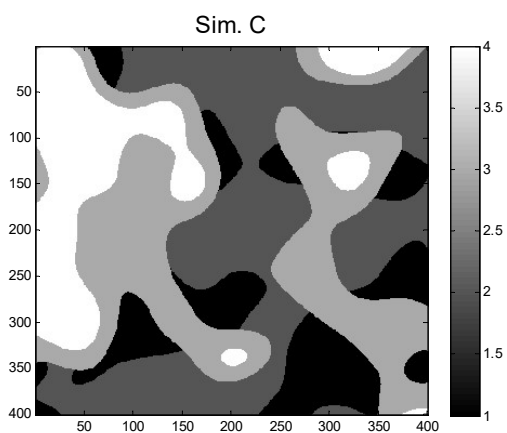
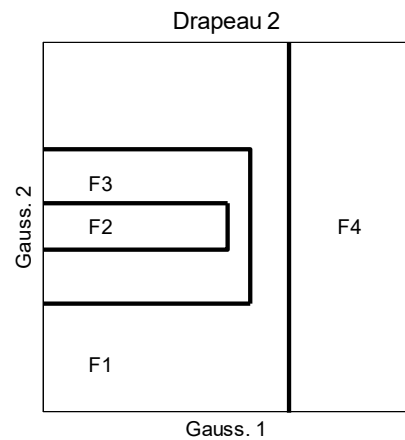
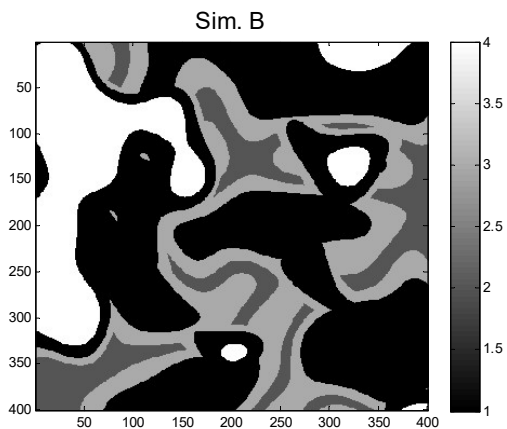
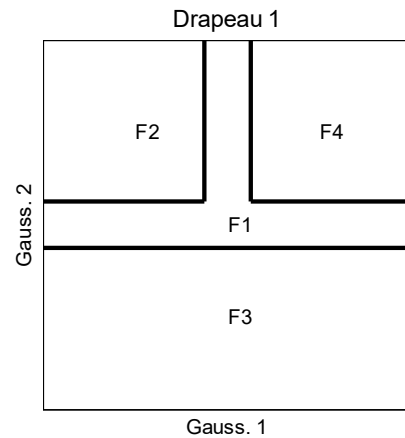
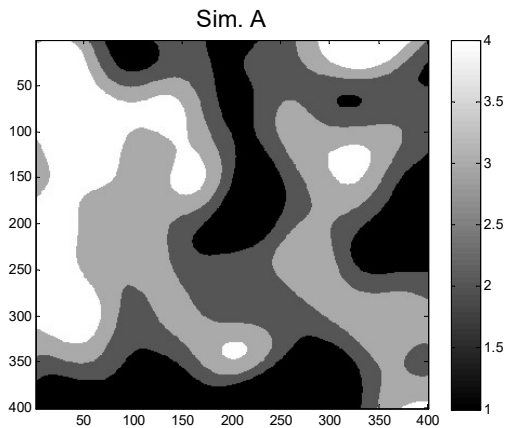


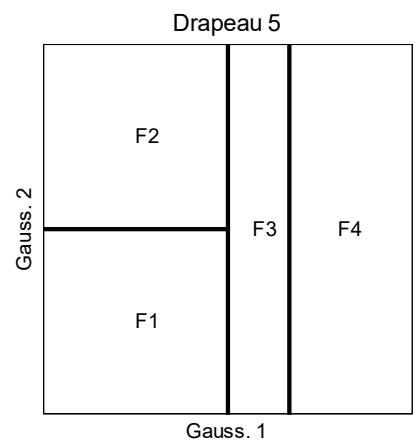
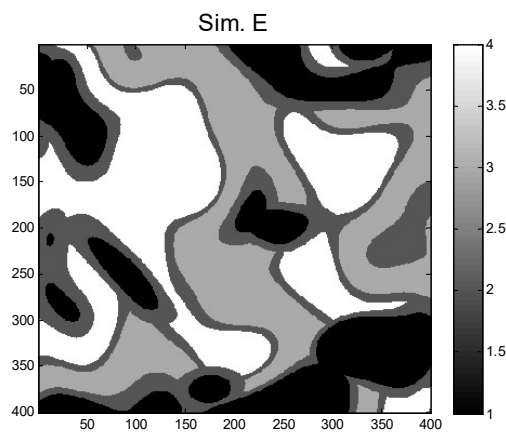
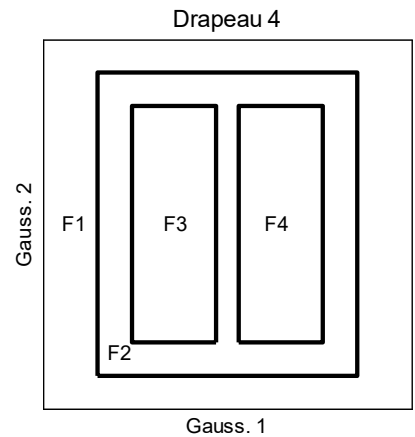
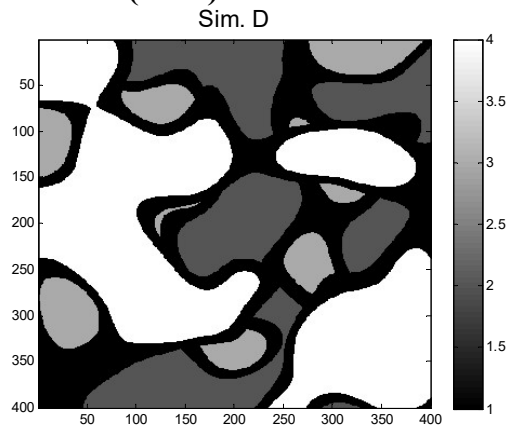
Examen 2014

Question 1 (12 points)

Les figures suivantes montrent 5 différentes simulations plurigaussiennes (A à E) et 5 différents drapeaux de codage (1 à 5) placés dans un ordre quelconque. Dans chaque simulation, on retrouve 4 faciès représentés par des niveaux de gris différents (F1=1, F2=2, F3=3, F4=4). On désire associer un drapeau à chaque image simulée.



Question 1 (suite)



10 pts a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage correspondant. Indiquez « aucun » si aucun drapeau de codage ne correspond à la simulation considérée.

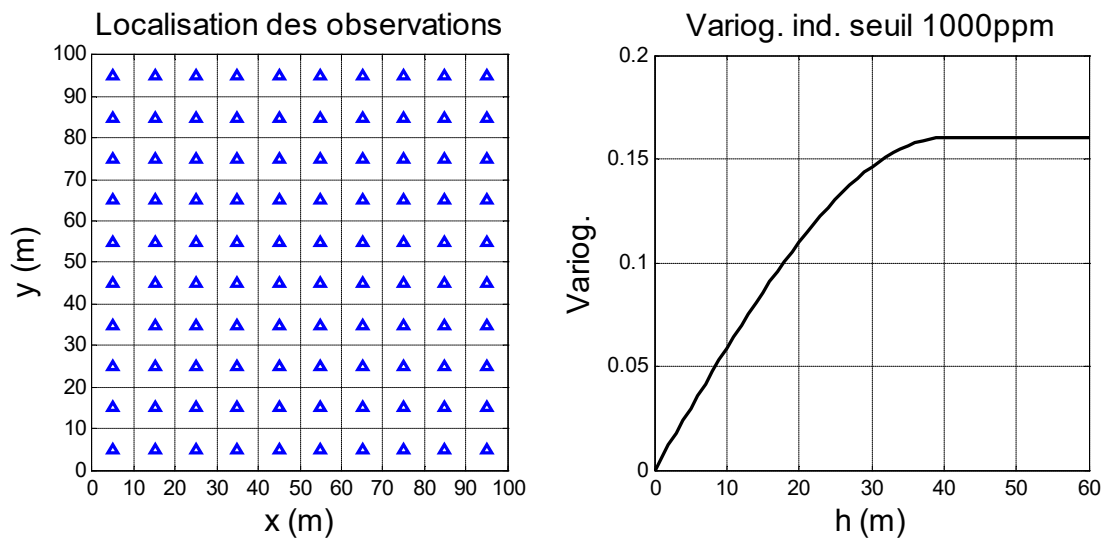
Simulation	A	B	C	D	E
Drapeau					

2 pts b) Une seule simulation de deux variables gaussiennes a été utilisée pour produire les simulations de faciès précédentes. Le variogramme utilisé pour les deux variables est le même. Identifiez le modèle utilisé parmi les modèles suivants (justifiez votre choix) :

- i. Gaussien isotrope avec portée de 100 pixels
- ii. Sphérique isotrope avec portée de 100 pixels
- iii. Gaussien anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement
- iv. Sphérique anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement

Question 2 (12 points)

À l'aide d'une grille régulière de points, on veut estimer la proportion de sols contaminés aux hydrocarbures sur la zone indiquée à la figure suivante. Un sol est considéré contaminé si sa valeur est supérieure à 1000 ppm. La figure montre aussi le variogramme (isotrope) de l'indicateur définie au seuil 1000 ppm d'hydrocarbures.



3 pts a) Quel est le modèle de variogramme de l'indicateur ?

3 pts b) Considérant seulement le variogramme de l'indicateur, approximativement quelle proportion de l'ensemble de la zone étudiée est contaminée (aide : deux réponses sont possibles) ?

6 pts c) Trouvez l'écart-type de l'erreur d'estimation de la proportion de sols contaminés sur l'ensemble de la zone (un abaque est fourni en annexe).

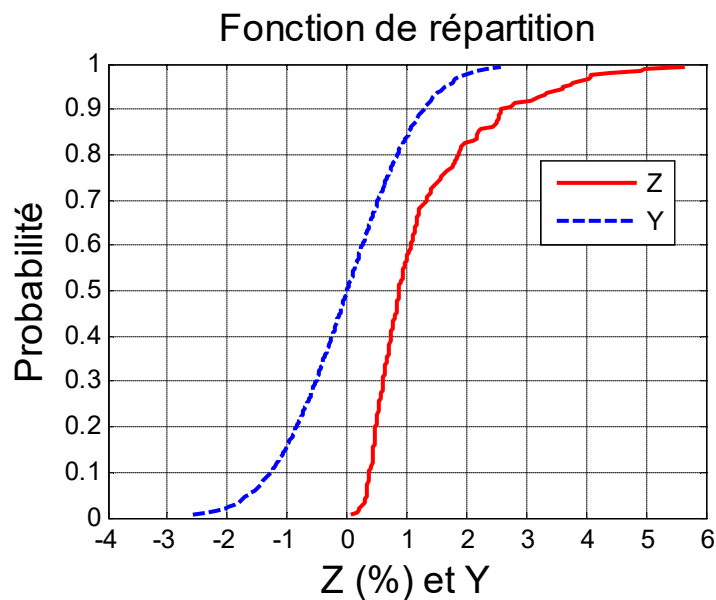
Question 3 (14 points)

La méthode de simulation SGS consiste à :

- iv. choisir un point à simuler;
- v. estimer par krigeage simple la distribution conditionnelle de la variable en ce point compte tenu des observations connues;
- vi. tirer aléatoirement une valeur de la distribution conditionnelle et ajouter cette valeur à l'ensemble des données observées et des données déjà simulées.

3 pts a) Expliquez pourquoi cet algorithme assure que chaque réalisation respectera les données observées aux points échantillons.

Lorsque les données (Z) ne suivent pas une distribution gaussienne, on doit au préalable les transformer (Y) pour les rendre gaussiennes. La figure suivante montre graphiquement une telle transformation.



Question 3 (suite)

- 3 pts b) Une donnée valant $Z(x)=3\%$ aurait quelle valeur gaussienne après transformation?
- 5 pts c) On applique l'algorithme. À un point donné, le krigeage simple retourne la valeur -1.2 avec un écart-type de krigeage de 0.3 . Le générateur de nombres aléatoires distribués suivant une loi uniforme $(0,1)$ retourne la valeur 0.9 . Que vaut $Z(x)$ (simulé) à ce point ?
- 3 pts d) Suggérez une approche qui permettrait d'utiliser le principe séquentiel du SGS mais sans devoir transformer vers la loi normale et supposer la distribution multigaussienne de la variable transformée.

Question 4 (15 points)

On vous fournit le tableau suivant donnant, le long d'un profil, les coordonnées, les valeurs observées, les valeurs d'une simulation non-conditionnelle, les valeurs krigées avec d'une part, les données observées et d'autre part, les valeurs simulées.

Coordonnée	Valeurs observées	Simulation non-conditionnelle	Valeur krigée avec les données	Valeurs krigées avec les valeurs simulées aux points des données	Simulation conditionnelle (à calculer)
0	10	6	10	6	
100	-	7.5	9	8	
200	-	7	8	10	
300	-	10	7	12	
400	6	14	6	14	

6 pts a) Transformez par post-conditionnement la simulation non-conditionnelle en une simulation conditionnelle (inscrivez vos réponses dans le tableau)

3 pts b) Le signal simulé représente la topographie du fond marin. Supposons que l'on veuille déterminer la pente moyenne susceptible d'être rencontrée le long du profil. Est-il préférable de :

C) générer plusieurs réalisations, calculer la pente moyenne pour chaque réalisation et faire la moyenne sur toutes les réalisations de ces pentes moyennes

ou

D) générer plusieurs réalisations, calculer la moyenne des réalisations et calculer la pente moyenne sur cette « réalisation » moyenne.

Justifier.

Question 4 (suite)

3 pts c) L'on effectue un grand nombre de réalisations et l'on calcule la moyenne des valeurs conditionnelles simulées au point $x=100$. Quelle devrait être cette valeur moyenne ?

3 pts d) Le modèle de variogramme utilisé pour la simulation est sphérique avec $C=25$ et $a=30$. La variance de krigeage au point $x=100$ vaut 12. Quel devrait être l'écart-type des réalisations au point $x=100$?

Question 5 (12 points)

On simule par la méthode de Cholesky Z_2 et Z_3 conditionnellement à la valeur $Z_1=2$ et suivant un variogramme donné. La matrice triangulaire inférieure issue de la décomposition de la matrice de covariance est (les variables sont placées dans l'ordre Z_1, Z_2 et Z_3) :

$$L = \begin{bmatrix} 2.236 & 0 & 0 \\ 1.342 & 1.789 & 0 \\ 0.447 & 1.901 & 1.09 \end{bmatrix}$$

3 pts a) Quel est le palier du variogramme simulé ?

3 pts b) Que vaut la valeur Y_1 ?

3 pts c) On tire $Y_2 = -1$ et $Y_3 = 1.5$. Quelles sera la valeur simulée pour Z_2 ?

3 pts d) Quelle est la covariance théorique entre Z_2 et Z_3 , conditionnelle à $Z_1=2$? (Aide : Y_1 n'est pas aléatoire; exprimez Z_2 et Z_3 en fonction de Y_2 et Y_3 ; en déduire la covariance recherchée)

Question 6 (15 points)

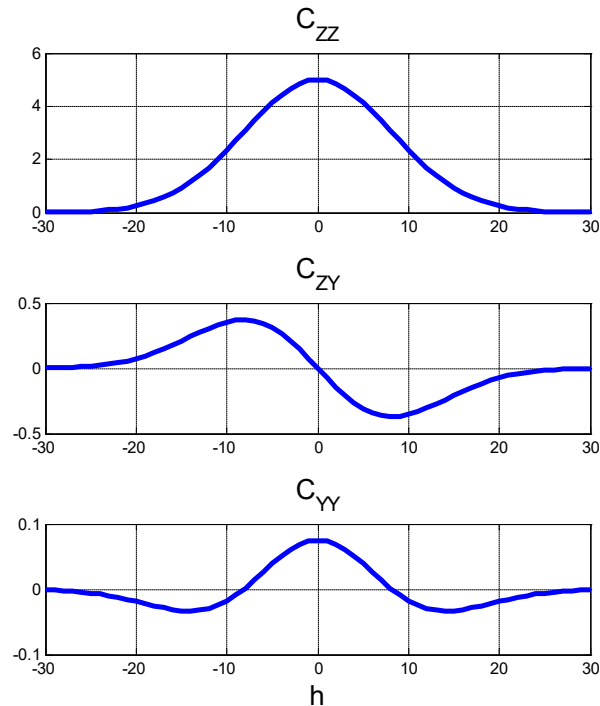
Le long d'un profil (axe « x »), on veut estimer l'élévation du sommet $Z(x)$ d'une formation géologique. Soit la dérivée $Y(x)=dZ(x)/dx$ décrivant l'accroissement de l'élévation en se déplaçant le long du profil. La covariance de Z est un modèle gaussien de portée effective 20 et de palier $C=5$. On a alors :

$$C_{ZZ}(h) = 5 \exp(-3h^2 / 400)$$

$$C_{ZY}(h) = -3/40 h \exp(-3h^2 / 400)$$

$$C_{YY}(h) = 3/40 \exp(-3h^2 / 400) - 9/8000 h^2 \exp(-3h^2 / 400)$$

Ces trois fonctions de covariance sont présentées à la figure suivante :



Le tableau suivant fournit les valeurs des fonctions de covariance pour quelques valeurs particulières de « h ».

	h						
	-10	-7	-3	0	3	7	10
$C_{ZZ}(h)$	2.362	3.462	4.674	5	4.674	3.462	2.362
$C_{ZY}(h)$	0.354	0.364	0.210	0	-0.210	-0.364	-0.354
$C_{YY}(h)$	-0.018	0.014	0.061	0.075	0.061	0.014	-0.018

Question 6 (suite)

- 8 pts a) On connaît la valeur de Z et de sa dérivée Y aux points $x_1=0$ et $x_2=10$. On désire effectuer l'estimation, par cokrigage simple, au point $x_0=3$. Construisez le système de cokrigage simple sous forme matricielle (ne pas résoudre). Indiquez clairement la signification des colonnes et lignes de la matrice de gauche et du vecteur de droite de ce système.

Question 6 (suite)

- 3 pts b) *Est-ce un contexte où l'on s'attend à ce que le cokrigeage permette d'améliorer sensiblement l'estimation? Justifier.*

On a résolu le système de krigeage simple et celui de cokrigeage simple. On a obtenu :

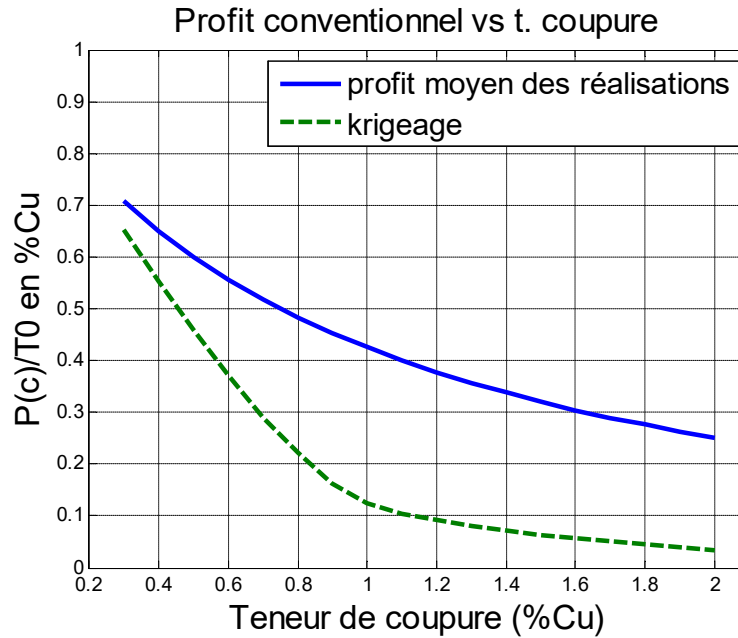
$$\text{KS : } \lambda_1 = 0.782 \quad \lambda_2 = 0.323$$

$$\text{CO_KS : } \lambda_{1,Z} = 0.789 \quad \lambda_{2,Z} = 0.200 \quad \alpha_{1,Y} = 1.691 \quad \alpha_{2,Y} = -0.719$$

- 4 pts c) *Calculez la variance de krigeage simple et la variance de cokrigeage simple. Discutez.*

Question 7 (10 points)

Soit la figure suivante montrant le profit conventionnel, en fonction de la teneur de coupure, obtenu par krigeage et aussi le profit obtenu, en moyenne, pour les différentes réalisations d'une simulation.



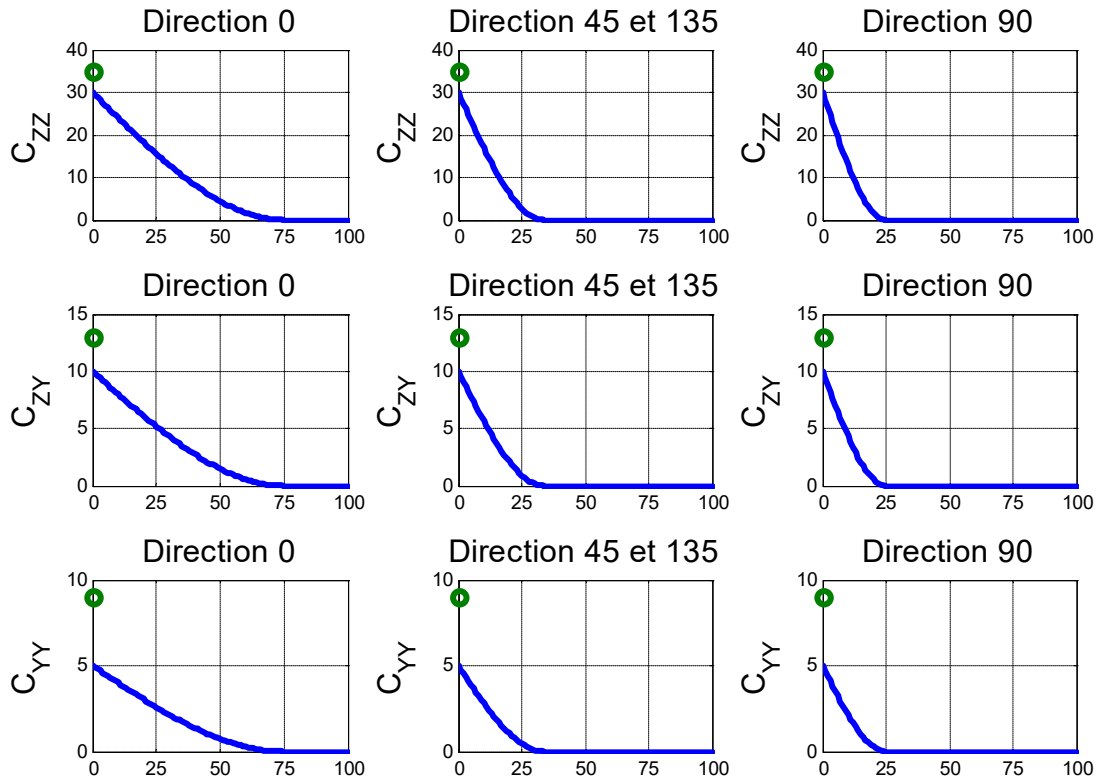
4 pts a) Si l'on sélectionnait les blocs à partir des estimés actuels de krigeage, quel profit conventionnel obtiendrait-on approximativement à une teneur de coupure de 1% ?

4 pts b) Si l'on connaissait parfaitement les teneurs réelles des blocs, quel profit pourrait-on espérer obtenir à la teneur de coupure 1% ?

2 pts c) Selon les courbes présentées, devrait-on chercher à améliorer l'estimation des blocs si la teneur de coupure est 1% ? Justifier.

Question 8 (10 points)

Soit le modèle linéaire de corégionalisation indiqué aux figures suivantes.



Décrivez entièrement le modèle linéaire de corégionalisation (en 2D) et déterminez s'il est admissible.

Annexe :

Fonction de répartition de la $N(0,1)$, i.e. $P(Z \leq z)$. L'entier et la 1^{ère} décimale de « z » sont lus en ligne, la 2^e décimale est lue en colonne.

Exemple d'utilisation :

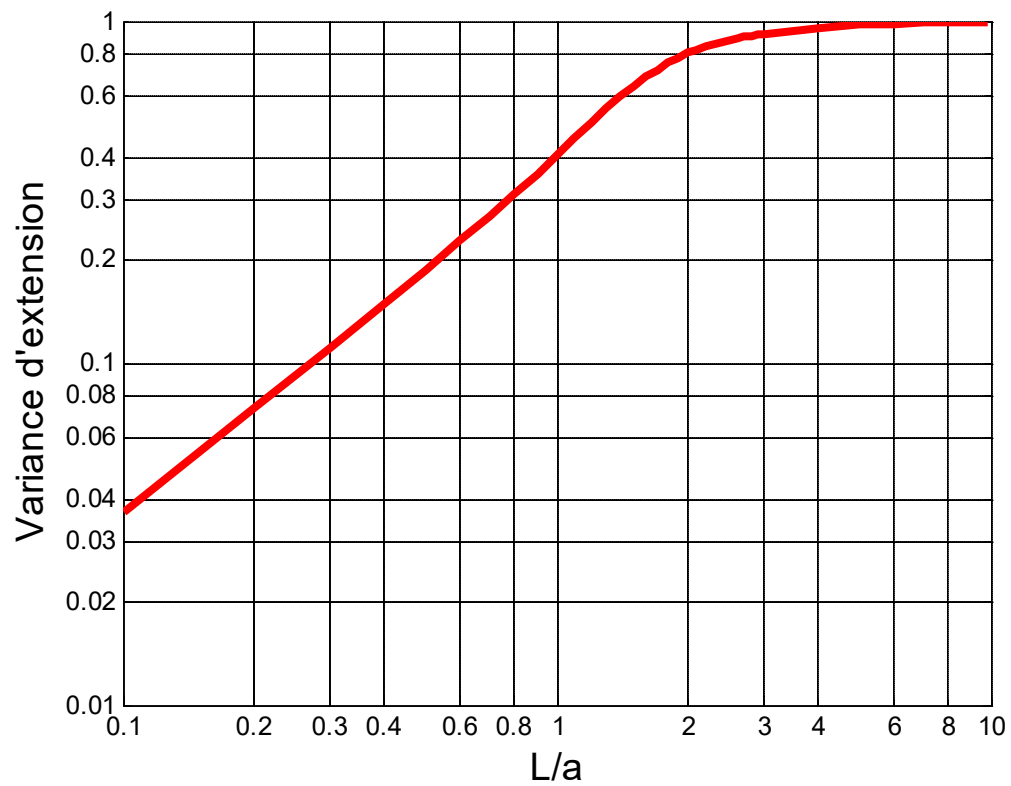
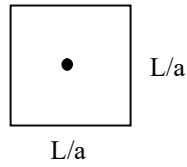
- i. Trouver $p=F(z)$ à « z » spécifié : $F(1.37)=P(N(0,1)<1.37)=0.9147$
- ii. Trouver z à « p » spécifié : $F(z)=0.9904 \Rightarrow z=2.34$

Fonction de répartition N(0,1)										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Annexe :

Abaque

Variance d'extension d'un point à un carré, modèle sphérique avec $C=1$ (abaque 7, courbe E3)



Corrigé

Q 1a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage correspondant.

Simulation	A	B	C	D	E
Drapeau	3	2	5	1	4

b) Gaussien isotrope. On ne voit aucun étirement indicateur d'anisotropie et la texture est clairement celle d'un gaussien en raison de la régularité des contours des facies.

Q2-

a) Sphérique, sans effet de pépite, avec portée de 40m et $C=0.16$

b) comme $C=p*(1-p)$, la proportion peut donc être de 0.2 ou de 0.8.

c) On utilise l'abaque 7, courbe à 10/40, on trouve un facteur de 0.093, donc $0.093*0.16=0.0149$ pour l'ensemble de la zone, la variance d'estimation sera : $0.0149/100=0.000149$.

L'écart-type d'estimation est donc 0.012.

3- a) si le point que l'on veut simuler est une observation, le krigeage simple retourne la valeur observée et une variance de krigeage nulle (interpolateur exact). La valeur que l'on tire est donc nécessairement la valeur krigée, soit la valeur de l'observation.

b) $p(3\%)=0.91$ $Y(0.91)=1.3$ environ

c) On cherche la valeur t correspondant à $p=0.6$ pour une distribution normale de moyenne -1.2 et d'écart-type 0.3. $P((Y_s - (-1.2))/0.3 < t) = 0.9$. Dans la table $N(0,1)$, on trouve que t vaut 1.28. Donc $Y_s(x)$ est : $1.28*0.3 - 1.2 = -0.816$. Du graphique, on trouve un p de 0.21 environ et une valeur correspondante pour Z de 0.5% environ.

d) Il suffirait de remplacer le krigeage simple par un krigeage d'indicatrice pour estimer la distribution conditionnelle, on tirerait une valeur de cette distribution et l'on ajouterait cette valeur aux données avant de passer à la donnée suivante.

4- a) On fait $Z_{sc} = Z^* + (Z_s - Z_s^*)$

Coordonnée	Valeurs observées	Simulation non-conditionnelle	Valeur krigée avec les données	Valeurs krigées avec les valeurs simulées aux points des données	Simulation conditionnelle
0	10	6	10	6	$10 + (6 - 6) = 10$
100	-	7.5	9	8	$9 + (7.5 - 8) = 8.5$
200	-	7	8	10	$8 + (7 - 10) = 5$
300	-	10	7	12	$7 + (10 - 12) = 5$
400	6	14	6	14	$6 + (14 - 14) = 6$

b) La méthode A. La méthode B revient à appliquer une fonction de transfert non-linéaire aux valeurs krigées, ce que l'on sait être incorrect.

c) La valeur krigée, soit 9.

d) La racine de l'écart-type de krigeage $12^{0.5}$

Q5- a) On calcule $K=L*L'=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Sur la diagonale, on a le palier du variogramme soit 5.

b) Comme $Z_1=2$, $Y_1=Z_1/L_{11}=2/2.236=0.894$

c) $Z_2=1.342*0.894+1.789*(-1)=-0.589$

d) $Z_2=c_{te}+1.789*Y_2$; $Z_3=1.901*Y_2+1.09*Y_3$. $Cov(Z_2,Z_3|Z_1)=1.789*1.901=3.40$

Q6

a)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.362 & 0 & -0.354 \\ 2.362 & 5 & 0.354 & 0 \\ 0 & 0.354 & 0.075 & -0.18 \\ -0.354 & 0 & -0.18 & 0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.674 \\ 3.462 \\ 0.210 \\ -0.364 \end{bmatrix}$$

b) Oui car il y a une relation déterministe entre les variables principales et secondaires.

c) pour ks : $5-0.782*4.674-0.323*3.462 = 0.2267$

pour coks : $5-0.789*4.674 -0.2*3.462 -1.691*0.210 +0.364*(-0.719) = 0.003$

On a réduit la variance d'estimation d'un facteur 7!

Q7-

a) $\sim 0.12\%$ Cu (valeur prédite par le krigeage)

b) 0.42% Cu (valeur moyenne prédite par les simulations).

c) On a évidemment intérêt à améliorer les estimations des blocs afin d'accroître nos profits. Les estimés actuels sont beaucoup trop imprécis.

Q8- $C(h) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ effet de pépite (avec $C=1$) + $\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ Sphérique avec anisotropie géométrique

($a_0=75$ et $a_{90}=25$; $C=1$)

les deux déterminants valent 11 et $50 > 0$ donc le modèle est admissible.