

Notes :

1. Vous répondez sur le questionnaire.
2. *Écrivez **lisiblement***
3. Fournir les détails des calculs et justifier vos réponses lorsque requis. Ne pas oublier d'indiquer les unités.
4. Les justifications nécessitent généralement **une à deux phrases**.
5. Le professeur et les surveillants ne répondent à aucune question durant l'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.
6. Deux feuilles recto-verso d'aide-mémoire sont autorisées.
7. Toute calculatrice est permise.

L'examen comprend 8 questions, totalisant 100 points, réparties sur 18 pages.

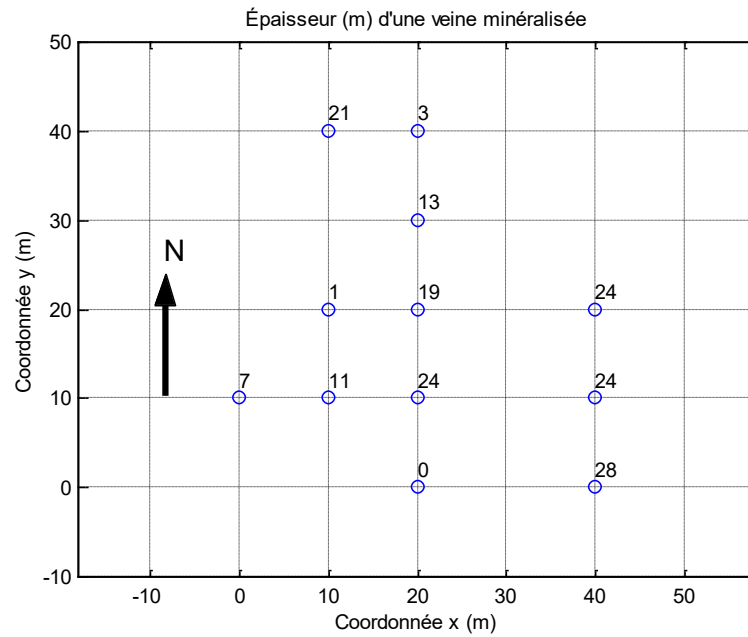
Dans l'ordre: Q1-18pts, Q2-10pts, Q3-16pts, Q4-16pts, Q5-8pts, Q6-12pts, Q7-12pts, Q-8pts

Nom de la personne étudiante : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question 1 (18 points) – Variogramme expérimental et variogramme théorique

Soit la disposition suivante des données d'une mine montrant l'épaisseur d'une veine minéralisée.



- 8 pts a) Calculez, selon un azimuth de 90° et une tolérance angulaire de $0,1^\circ$, la valeur du variogramme expérimental pour la classe de distance $]0, 20]$ m. Précisez la distance moyenne h_{lag} , le nombre de paires $N(h_{lag})$ et la valeur $\gamma_e(h_{lag})$.

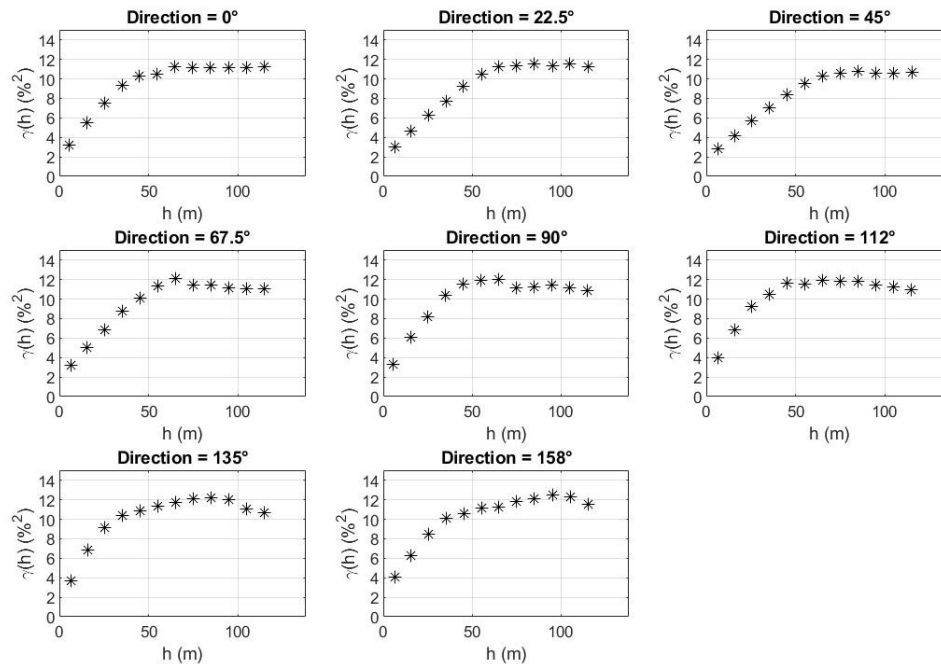
Réponses:

$h_{lag} =$

$N(h_{lag}) =$

$\gamma_e(h_{lag}) =$

7 pts b) Pour un banc d'une mine de cuivre, on calcule les variogrammes expérimentaux des teneurs en % de Cu, exprimées selon différentes directions, avec une tolérance angulaire de 10° . Ajustez un seul modèle de variogramme 2D à ces variogrammes expérimentaux. (Note - Fournissez toutes les informations nécessaires pour représenter adéquatement le modèle théorique).



3 pts c) On effectue un krigeage ordinaire sur une grille régulière de 10 m, en partant du point (5 m, 5 m), à partir des données de la question a). Le krigeage utilise l'ensemble des données observées pour estimer les valeurs aux points de la grille. Le modèle de variogramme retenu est de type sphérique avec un effet de pépité. On calcule ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées. La question est alors la suivante : le variogramme expérimental obtenu sera-t-il correctement ajusté par le modèle de krigeage utilisé (c'est-à-dire un modèle sphérique avec effet de pépité) ? Justifiez votre réponse à l'aide de deux arguments principaux.

Question 2 (10 points) – Calcul de la variance de bloc

Une minière exploite simultanément trois zones distinctes considérées comme indépendantes. Chaque zone nourrit simultanément le concentrateur d'une quantité égale de roche. Le volume total de roche acheminé quotidiennement au concentrateur est de 3 000 m³ (soit environ trois blocs de 40 m x 10 m x 10 m (en x,y,z; z la profondeur)). Le variogramme ponctuel 3D du Cu (la substance principale de la mine) est sphérique et anisotrope, avec $C_0 = 2 \%$, $C_1 = 5 \%$, $a_{\text{horizontal}} = 80 \text{ m}$ et $a_{\text{vertical}} = 20 \text{ m}$. Le même variogramme s'applique à chaque zone.

- 5 pts a) *Quelle est la variance, sur une très longue période, de la teneur quotidienne en Cu entrant dans le concentrateur avec l'exploitation actuelle ?*

Réponse:

La minière considère que la variance calculée en a) est trop élevée, ce qui réduit l'efficacité du concentrateur. Elle évalue la possibilité d'utiliser une pile de pré-homogénéisation d'une capacité de 75 000 m³, la pile étant approvisionnée par la minière de la même façon que le concentrateur l'est actuellement. On peut donc considérer que, à la mine, le volume de la pile de pré-homogénéisation correspond à trois blocs indépendants de 50 m x 50 m x 10 m.

- 5 pts b) *Que devient, sur une très longue période, la variance de la teneur quotidienne en Cu entrant dans le concentrateur ?*

Réponse:

Question 3 (16 points) – Propriété de la variance de bloc et de dispersion

8 pts a) Soient les deux modèles de variogramme présentés sur la figure ci-dessous. Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau 1 seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculées avec les modèles A et B.

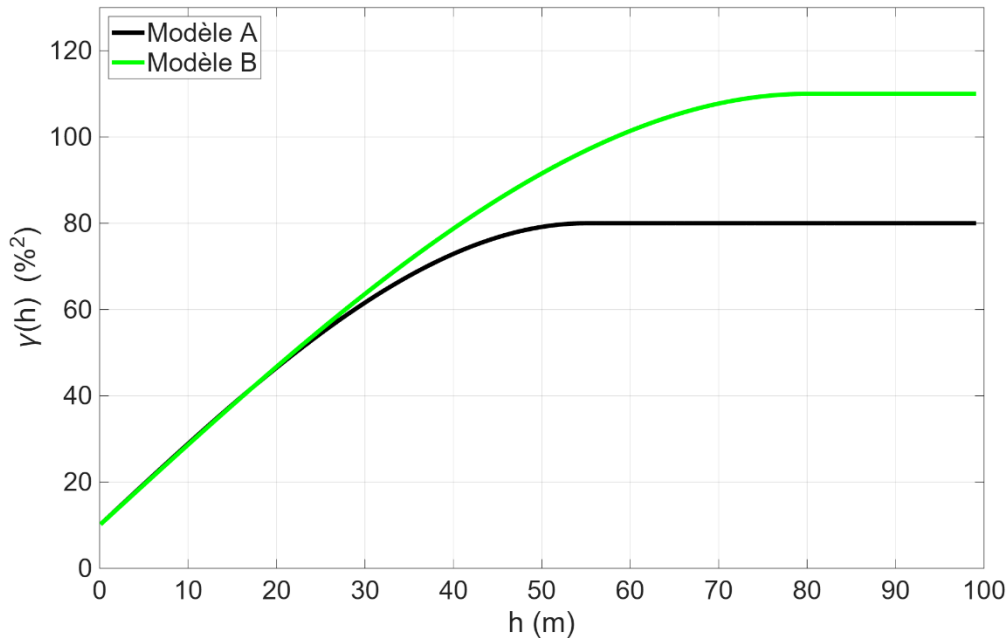


Tableau 1) Réponse à la question 3a.

		Semblable Oui (O) ou Non (N)
a)	La variance de la teneur d'un bloc de 10 m x 10 m	
b)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 20 m x 20 m	
c)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 10 m	
d)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 20 m x 20 m	
e)	La variance de la teneur d'un bloc de 100 m x 100 m	
f)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 100 m x 100 m	
g)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 40 m	
h)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 100 m x 100 m	

8 pts b) Soient les deux modèles de variogramme présentés sur la figure ci-dessous. Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau 2 seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculées avec les modèles C et D.

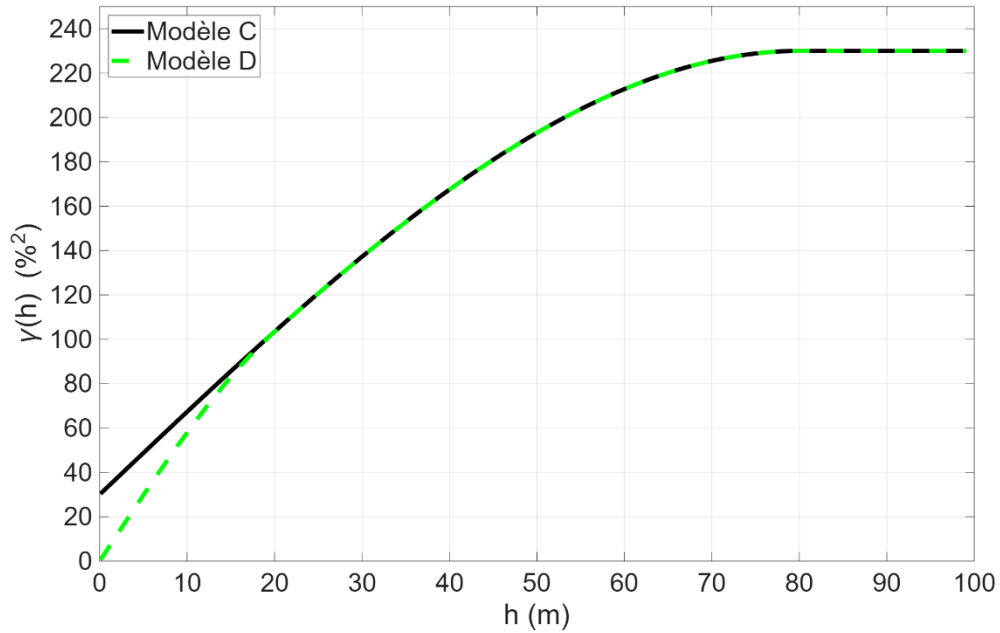
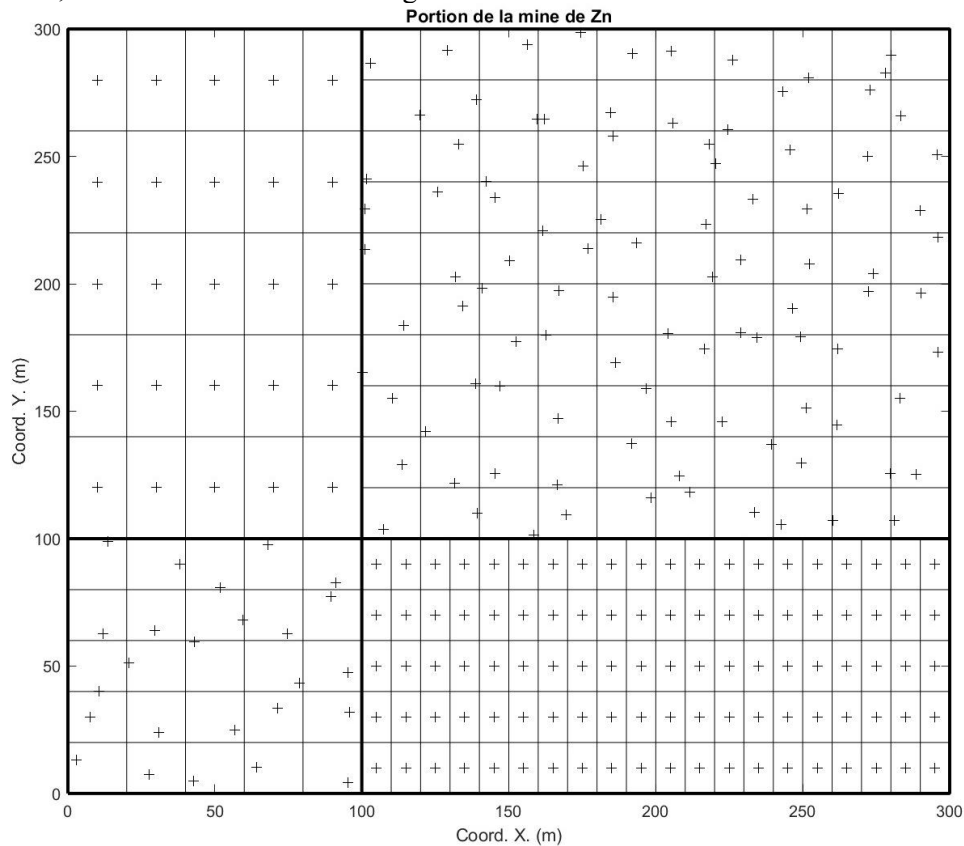


Tableau 2) Réponse à la question 3b.

		Semblable Oui (O) ou Non (N)
a)	La variance de la teneur d'un bloc de 10 m x 10 m	
b)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 20 m x 20 m	
c)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 10 m	
d)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 20 m x 20 m	
e)	La variance de la teneur d'un bloc de 100 m x 100 m	
f)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 100 m x 100 m	
g)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 40 m	
h)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 100 m x 100 m	

Question 4 (16 points) – Variance d'estimation et principes de combinaison d'erreurs élémentaires

La figure suivante montre l'emplacement des échantillons dans une portion d'une mine de zinc. On distingue quatre zones et quatre patrons d'échantillonnage différents (pour les zones nord-ouest et sud-est, vous pouvez considérer que l'échantillonnage est aléatoire stratifié avec un échantillon par cellule). Les teneurs (% Zn) sont mesurées sur des épaisseurs constantes de 5 m, correspondantes aux épaisseurs des bancs de la mine, et servent à calculer le variogramme 2D des teneurs en Zn.



Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en Zn pour l'ensemble de la zone si le variogramme est sphérique isotrope avec $C_0=6\%^2$, $C_1=30\%^2$ et $a=80$ m ? Répondez en complétant le tableau de la page suivante.

Question 4 (suite)

Zone	Nombre de forages	Taille des blocs	Variance pour la zone	Surface de la zone
1-NO			Type de grille : Calcul $\text{var}(e_1)$:	
2-NE			Type de grille : Calcul $\text{var}(e_2)$:	
3-SO			Type de grille : Calcul $\text{var}(e_3)$:	
4-SE			Type de grille : Calcul $\text{var}(e_4)$:	
Variance d'estimation de la teneur moyenne en Zn pour l'ensemble de la zone				
Calcul $\text{var}(e)$:				

Question 5 (8 points) – Variance d'estimation et effet de support

Une zone d'un gisement 3D d'or est délimitée à partir de 30 forages verticaux de 120 m de long chacun. Les forages sont disposés sur une grille régulière, espacés de 50 m dans les directions x et y. Les carottes de 4 m analysées en continu tout le long du forage ont permis d'identifier un modèle de variogramme sphérique avec $C_0 = 25 \text{ ppm}^2$, $C_1 = 75 \text{ ppm}^2$ et présentant une anisotropie géométrique avec $a_x = a_y = 100 \text{ m}$ et $a_z = 60 \text{ m}$. On considère le modèle isotrope dans le plan horizontal formé par les axes x et y.

Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en or pour l'ensemble de la zone couverte par les 30 forages ?

Réponse:

Question 6 (12 points) – Impact du modèle de variogramme sur le krigeage

Le tableau suivant présente 8 modèles de variogramme. La figure de la page suivante présente les résultats d'un krigeage 1D effectué à partir des mêmes points d'échantillon et de chacun des modèles du tableau. Les figures de gauche présentent la valeur estimée par krigeage ordinaire en fonction de la coordonnée x , et les figures de droite présentent la variance de ce krigeage en fonction de la coordonnée x .

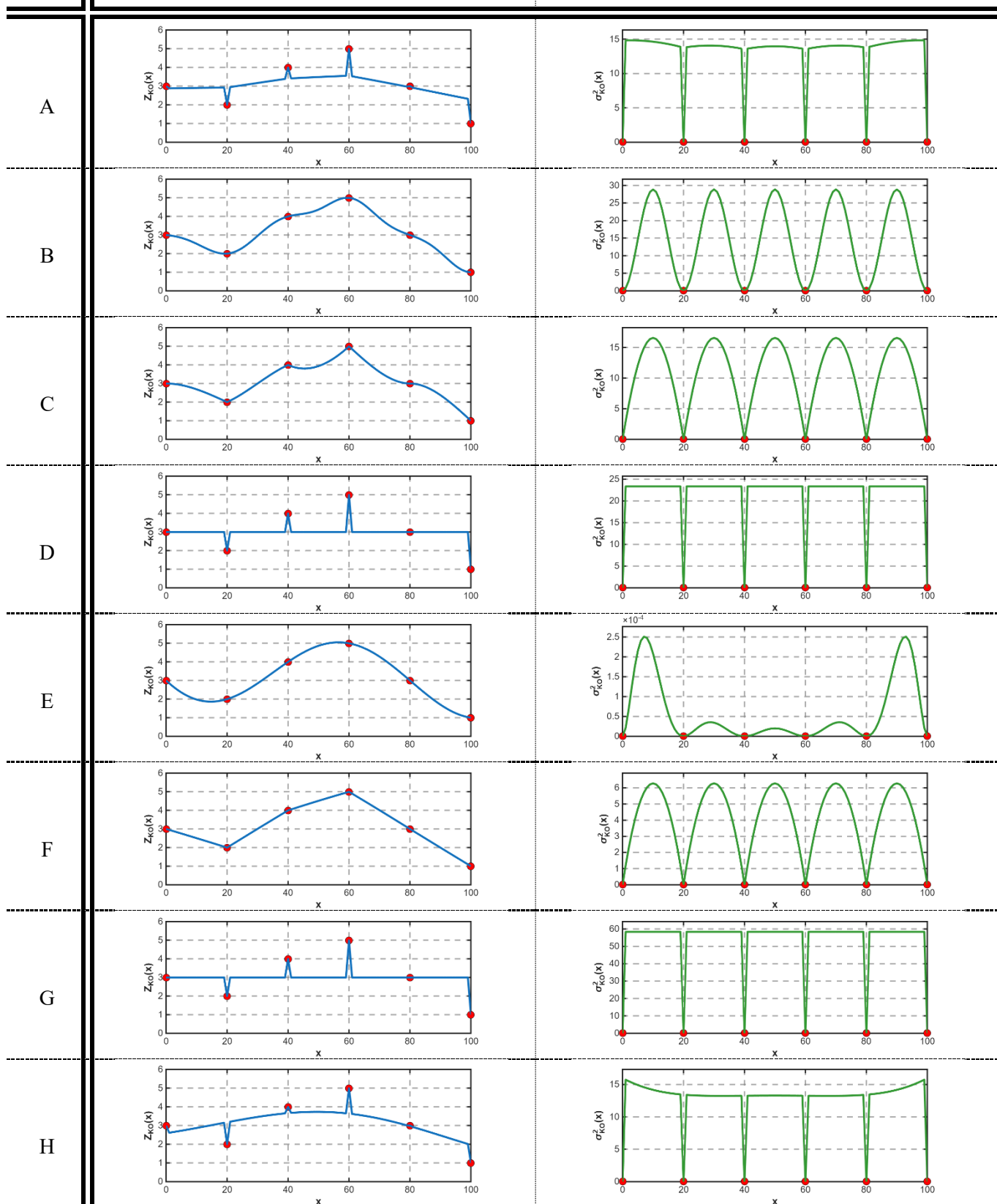
Associez une figure (de A à H) à chacun des modèles du tableau (répondez dans le tableau).

Modèle #	Description	Figure associée (A à H)
1	<i>Sphérique $a = 120, C_1 = 50$</i>	
2	<i>Sphérique $a = 20, C_1 = 20$</i>	
3	<i>Sphérique, $a=120, C_0 = 10, C_1 = 10$</i>	
4	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 120, C_1 = 50$</i>	
5	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 120, C_0 = 10, C_1 = 40$</i>	
6	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 20, C_1 = 50$</i>	
7	<i>Effet de pépité pur avec $C_0 = 20$</i>	
8	<i>Effet de pépité pur avec $C_0 = 50$</i>	

Figure

Valeurs estimées par krigeage ordinaire

Variance de krigeage ordinaire



Question 7 (12 points) – Construire et résoudre un système de krigeage

Un gisement d'or 2D présente un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 0^0 . Les paramètres du modèle sont $C_0=2 \text{ ppm}^2$, $C_1=8 \text{ ppm}^2$, $a_0=60 \text{ m}$, $a_{90}=30 \text{ m}$.

On souhaite effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnées (0, 0). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	-10	-10	3.1
2	-5	10	2.5
3	10	-5	7.1
4	10	5	2.1

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{pmatrix} 10 & A & 1.15 & 0.90 & 1 \\ B & C & 1.99 & 2.44 & 1 \\ 1.15 & 1.99 & 10 & 6.02 & 1 \\ 0.90 & 2.44 & D & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.73 \\ 5.22 \\ 4.04 \\ G \\ H \end{pmatrix}$$

8 pts a) Que valent les entrées A à G ?

Réponse:

A =

B =

C =

D =

E =

F =

G =

H =

Le système de krigeage est résolu et on obtient les poids suivants : $\lambda_1 = 0.2164, \lambda_2 = 0.3789, \lambda_3 = 0.2168$ et $\lambda_4 = 0.1879$. Le multiplicateur de Lagrange est $\mu = -0,2630$.

2 pts b) Estimez la teneur au point de coordonnées $(0, 0)$ par krigeage ordinaire.

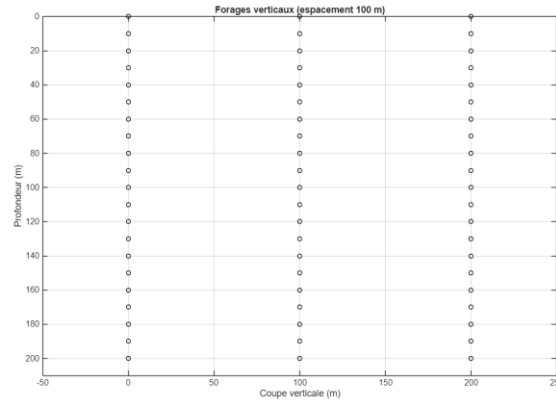
Réponse:

2 pts c) Calculez la variance du krigeage ordinaire. Posez $G = 4,04$ si vous n'avez pas pu identifier sa valeur à la question a).

Réponse:

Question 8 (8 points) – Estimation par krigeage en utilisant un voisinage local

La figure suivante illustre trois forages verticaux espacés de 100 m. Les centres des composites sont situés tous les 5 m, soit 21 par forage. Le variogramme est sphérique, avec une anisotropie géométrique et des portées principales $a_x = 200$ m et $a_z = 75$ m. On effectue le krigeage pour estimer les valeurs ponctuelles sur une grille régulière de points à 2 m d'intervalle.



Le tableau ci-dessous présente différentes stratégies de délimitation du voisinage utilisées pour le krigeage de chaque point. Le nombre de données indiqué correspond à un **maximum** : si plus de données sont disponibles, seules les plus proches, conformes à la stratégie de recherche, sont conservées.

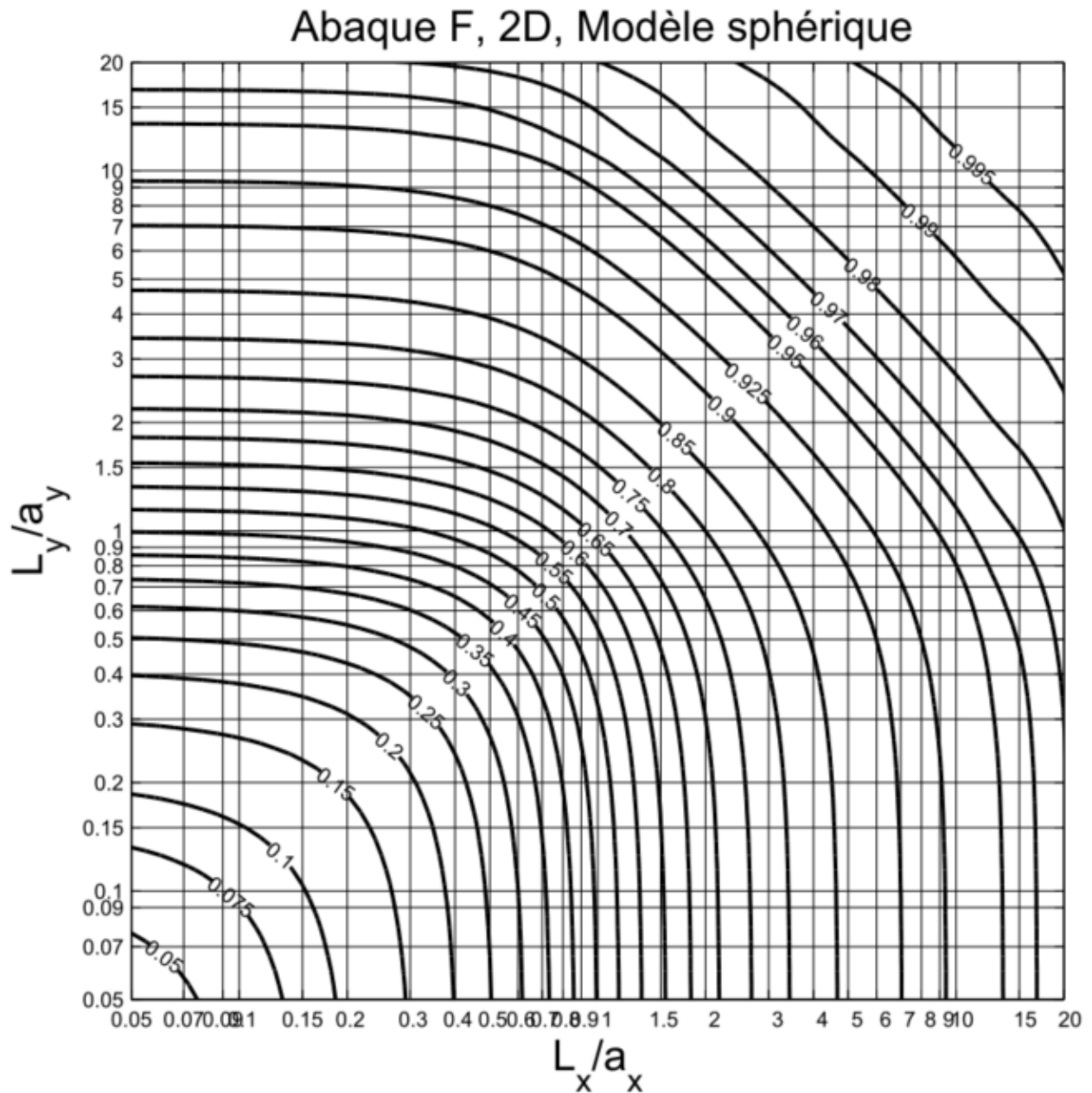
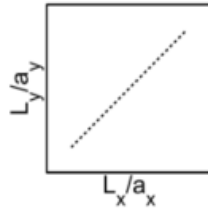
6 pts a) Indiquez dans le tableau si la stratégie est adéquate (O) ou non (N). Une stratégie est considérée comme adéquate lorsqu'elle ne provoque pas de discontinuité dans les résultats du krigeage.

Stratégie	Description	O ou N
A	Recherche circulaire de rayon 150 m; 30 points	
B	Recherche circulaire de rayon 150 m; 3 points par quadrant.	
C	Recherche circulaire de rayon 50 m; 30 points	
D	Recherche circulaire de rayon 150 m; 6 points	
E	Recherche elliptique, 150 m selon x, 50 m selon z; 30 points	
F	Recherche elliptique, 75 m selon x, 150 m selon z; 30 points	

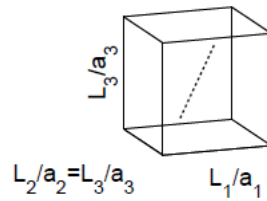
2 pts b) Pourquoi n'est-il pas recommandé d'utiliser la stratégie de validation croisée "leave-one-out" pour des forages en 3D ?

Abaques

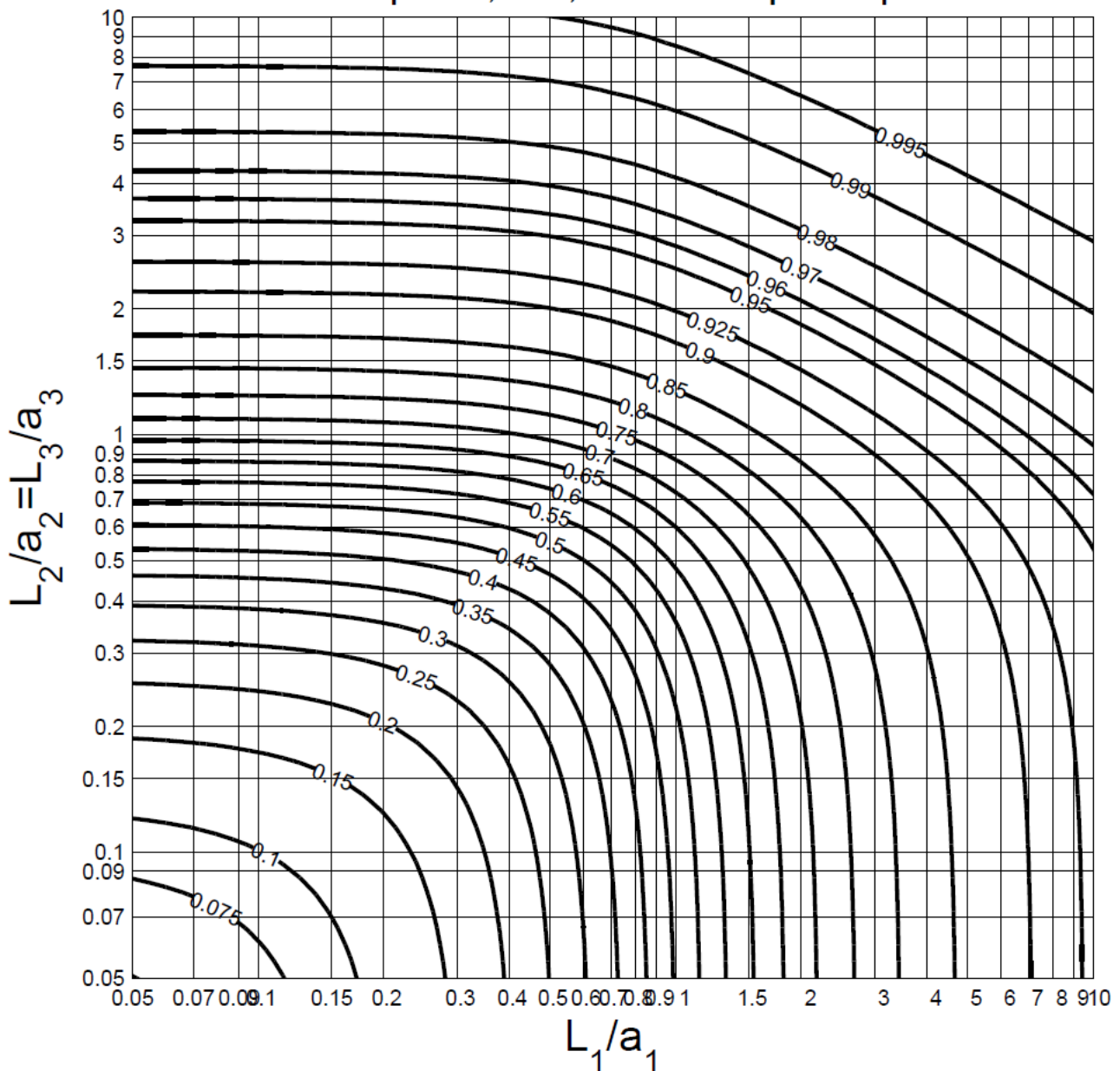
1- Variance de dispersion d'un point dans un rectangle, modèle sphérique



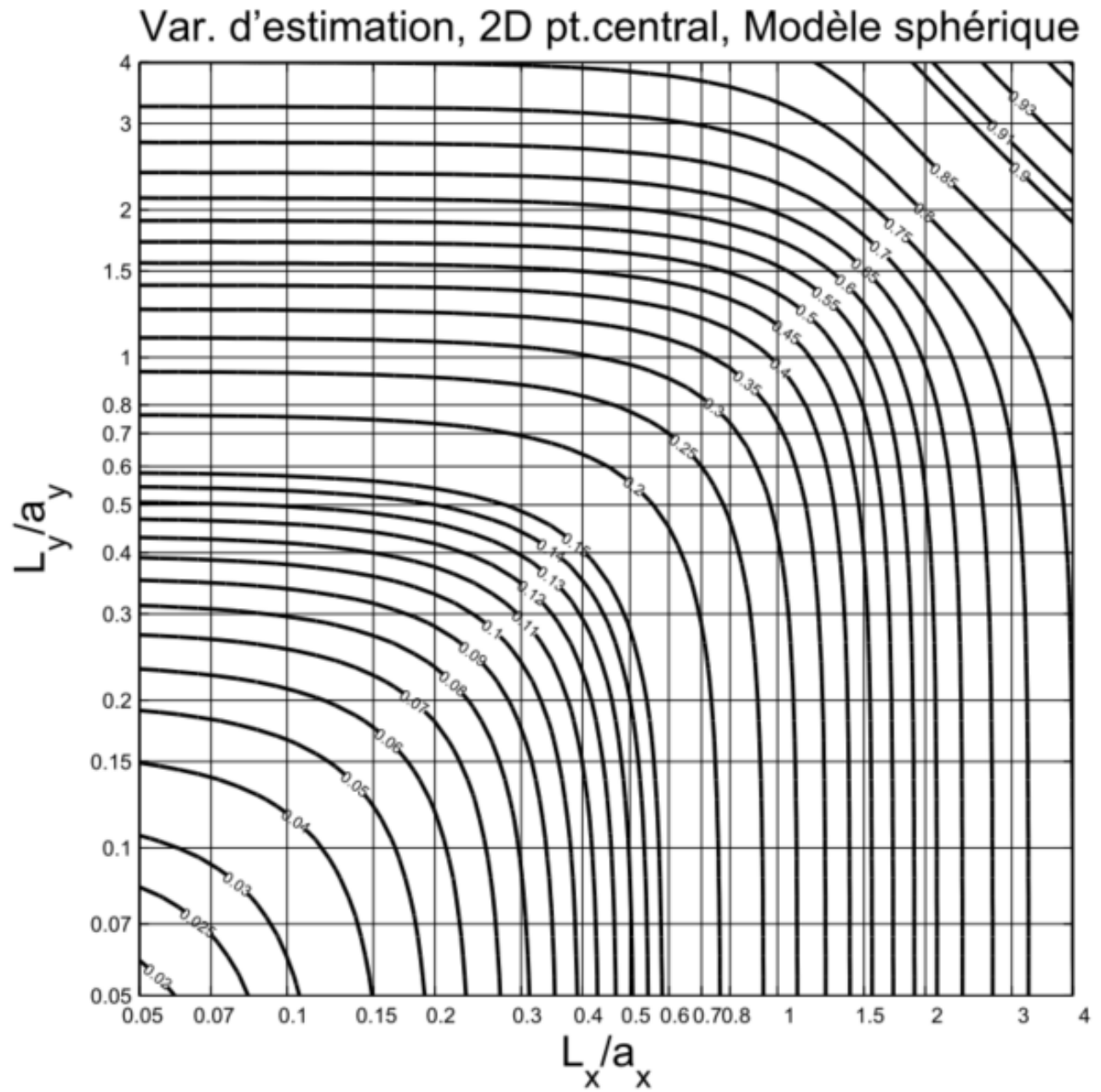
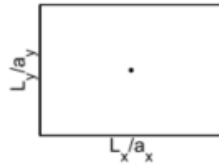
2- Variance de dispersion d'un point dans un prisme rectangulaire, modèle sphérique



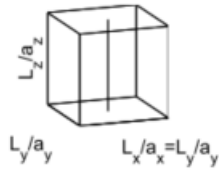
Abaque F, 3D, Modèle sphérique



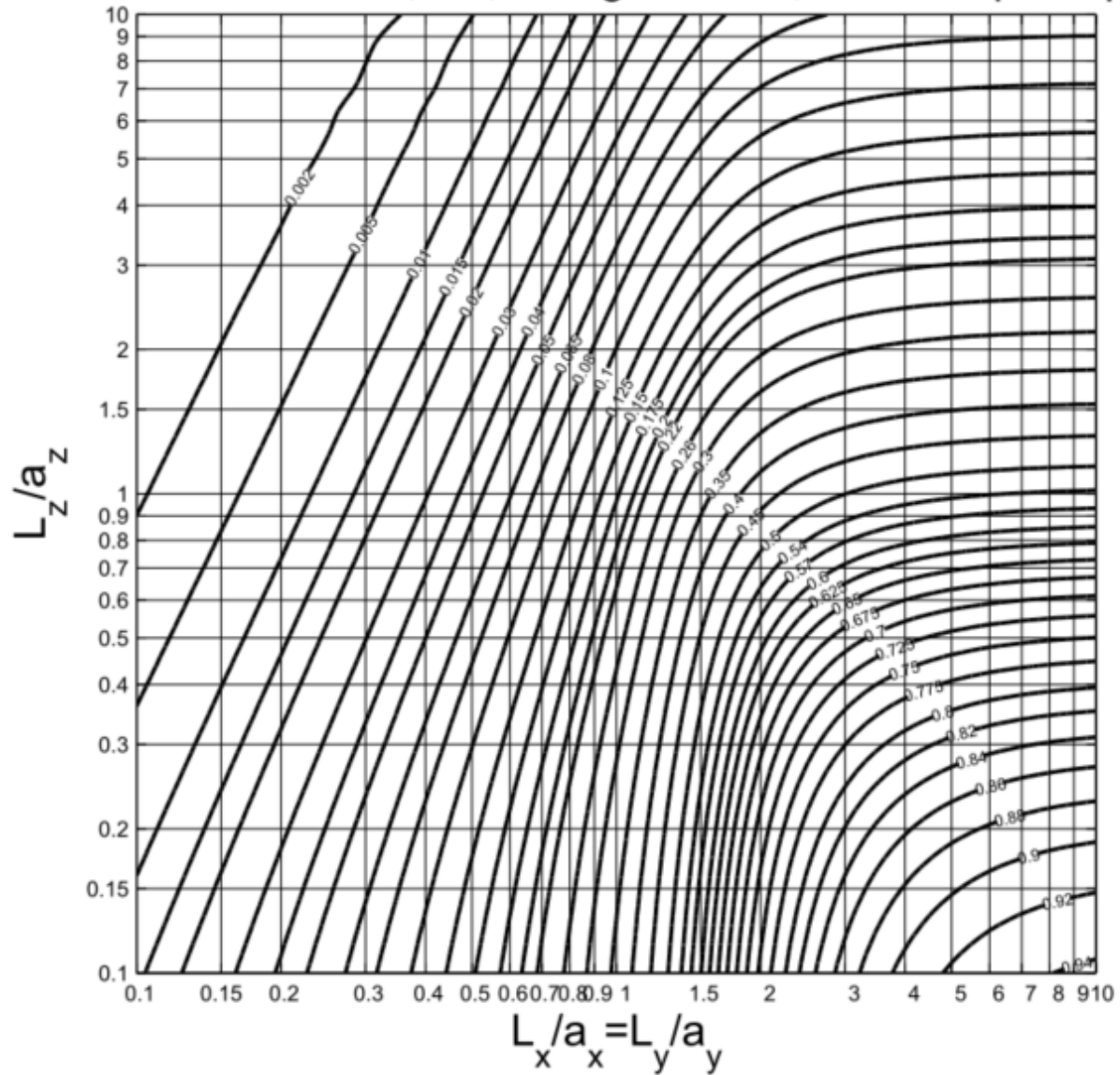
3- Variance d'estimation d'un rectangle par son point central, modèle sphérique



4- Variance d'estimation d'un bloc à section carrée par le forage central, modèle sphérique



Var. d'estimation, 3D, Forage central, Modèle sphérique



Notes :

1. Vous répondez sur le questionnaire.
2. *Écrivez **lisiblement***
3. Fournir les détails des calculs et justifier vos réponses lorsque requis. Ne pas oublier d'indiquer les unités.
4. Les justifications nécessitent généralement **une à deux phrases**.
5. Le professeur et les surveillants ne répondent à aucune question durant l'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.
6. Deux feuilles recto-verso d'aide-mémoire sont autorisées.
7. Toute calculatrice est permise.

L'examen comprend 7 questions, totalisant 100 points, réparties sur 17 pages.

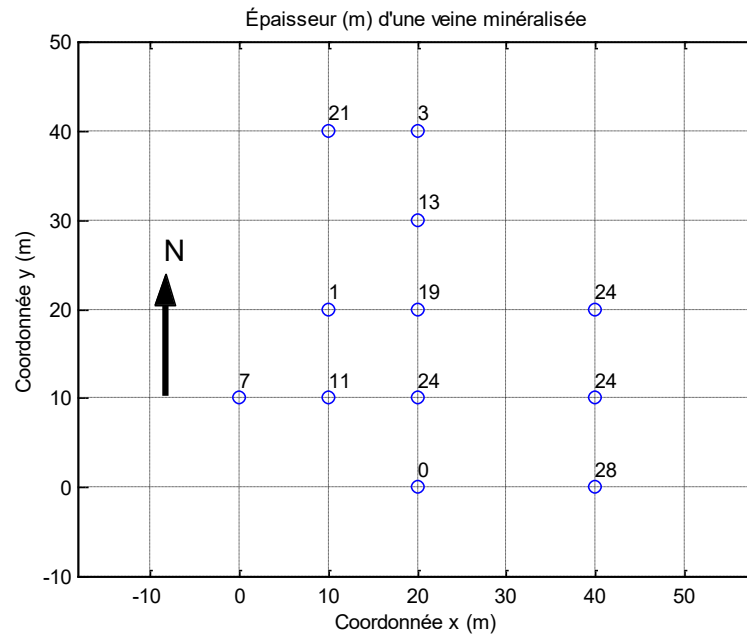
Dans l'ordre: Q1-18pts, Q2-10pts, Q3-16pts, Q4-16pts, Q5-8pts, Q6-12pts, Q7-12pts, Q-8pts

Nom de l'étudiant : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question 1 (18 points) – Variogramme expérimental et variogramme théorique

Soit la disposition suivante des données d'une mine montrant l'épaisseur d'une veine minéralisée.



8 pts a) Calculez, selon un azimuth de 90° et une tolérance angulaire de $0,1^\circ$, la valeur du variogramme expérimental pour la seule classe de distance $]0, 20]$ m. Précisez la distance moyenne h_{lag} , le nombre de paires $N(h_{lag})$, la valeur $\gamma_e(h_{lag})$ et la distance moyenne h_{lag} correspondante.

Couple à 10 m = (21, 3) ; (1, 19) ; (7, 11) ; (11, 24)

Couple à 20 m = (19, 24) ; (7, 24) ; (24, 24) ; (0, 28)

$$h_{lag} = \frac{(4 * 10 + 4 * 20)}{8} = 15$$

$$N(h_{lag}) = 8$$

$$\gamma_e(h_{lag}) = \frac{1}{2 * 8} ((21 - 3)^2 + (1 - 19)^2 + (7 - 11)^2 + (11 - 24)^2 + (19 - 24)^2 + (7 - 24)^2 + (24 - 24)^2 + (0 - 28)^2) = 120.6875$$

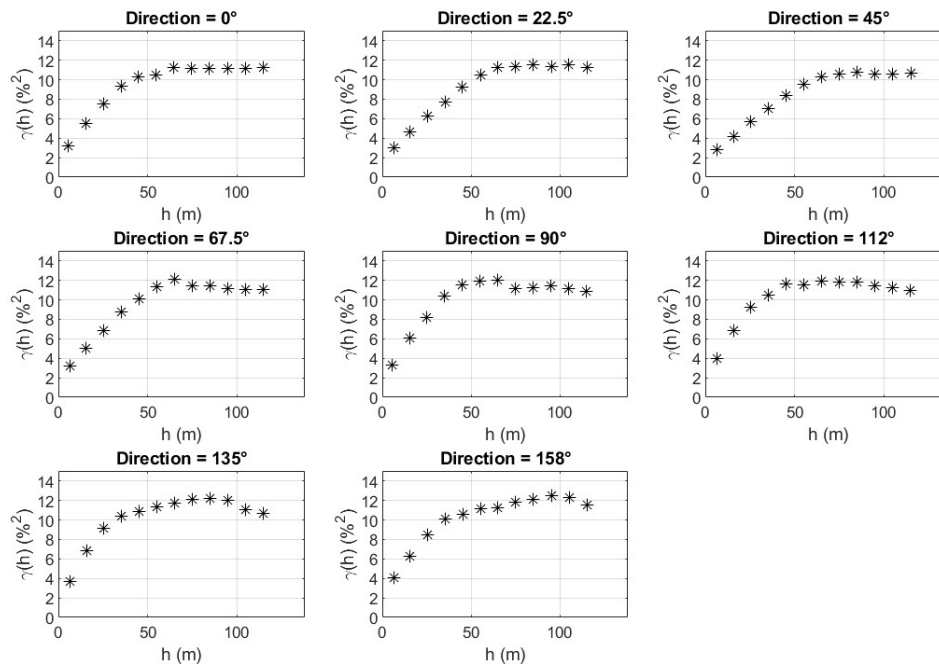
Réponses:

$$h_{lag} = 15 \text{ m}$$

$$N(h_{lag}) = 8$$

$$\gamma_e(h_{lag}) = 120.69$$

7 pts b) Pour un banc d'une mine de cuivre, on calcule les variogrammes expérimentaux des teneurs en % de Cu, exprimées selon différentes directions, avec une tolérance angulaire de 10° . Ajustez un seul modèle de variogramme 2D à ces variogrammes expérimentaux. (Note - Fournissez toutes les informations nécessaires pour représenter adéquatement le modèle théorique).



Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La portée principale est de 45 degrés et la portée minimale de 135 degrés. Les portées sont $a_g = 80$ m (1 pt) et $a_p = 40$ m (1 pt). $C_0 = 2\%$ et $C_1 = 10\%$.

3 pts c) On effectue un krigeage ordinaire sur une grille régulière de 10 m, en partant du point (5 m, 5 m), à partir des données de la question a). Le krigeage utilise l'ensemble des données observées pour estimer les valeurs aux points de la grille. Le modèle de variogramme retenu est de type sphérique avec un effet de pépité. On calcule ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées. La question est alors la suivante : le variogramme expérimental obtenu sera-t-il correctement ajusté par le modèle de krigeage utilisé (c'est-à-dire un modèle sphérique avec effet de pépité) ? Justifiez votre réponse à l'aide de deux arguments principaux.

Non, il ne sera pas bien ajusté pour 2 raisons.

Premièrement, l'effet de pépité sera complètement filtré puisque les valeurs krigées sont continuées (on ne krige qu'en des points sans donnée).

Deuxièmement, on a la propriété de lissage du krigeage qui nous dit que la variance des valeurs krigées sera inférieure à la variance des données. Donc le plateau sera inférieur (ceci demeure vrai même s'il n'y a pas d'effet de pépité).

Question 2 (10 points) – Calcul de la variance de bloc

Une minière exploite simultanément trois zones distinctes considérées comme indépendantes. Chaque zone nourrit simultanément le concentrateur d'une quantité égale de roche. Le volume total de roche acheminé quotidiennement à la cimenterie est de 3 000 m³ (soit environ trois blocs de 40 m x 10 m x 10 m (en x,y,z; z la profondeur)). Le variogramme ponctuel 3D du Cu (la substance principale de la mine) est sphérique, anisotrope, avec $C_0 = 2 \%$, $C_1 = 5 \%$, $a_{\text{horizontal}} = 80 \text{ m}$ et $a_{\text{vertical}} = 20 \text{ m}$. Le même variogramme s'applique à chaque zone.

- 5 pts a) *Quelle est la variance, sur une très longue période, de la teneur quotidienne en Cu entrant dans le concentrateur avec l'exploitation actuelle ?*

$$C' \text{ est } \frac{\sigma_v^2}{3}, \text{ or } \sigma_v^2 = C(1 - F(\frac{10}{80}, \frac{40}{80} = \frac{10}{20})) = 5 * (1 - 0.375) = 3.125, \text{ donc } 3.125/3 = 1.04 \%^2 \text{ (Abaque 3)}$$

Réponse:

1.04 %²

La minière considère que la variance calculée en a) est trop élevée, ce qui réduit l'efficacité du concentrateur. Elle évalue la possibilité d'utiliser une pile de pré-homogénéisation d'une capacité de 75 000 m³, la pile étant approvisionnée par la minière de la même façon que le concentrateur l'est actuellement. On peut donc considérer que, à la carrière, le volume de la pile de pré-homogénéisation représente trois blocs indépendants de 50 m x 50 m x 10 m.

- 5 pts b) *Que devient, sur une très longue période de temps, la variance de la teneur quotidienne en Cu entrant dans le concentrateur ?*

Idem qu'en a, mais avec un bloc de taille 50x50x10

$$C' \text{ est } \frac{\sigma_v^2}{3}, \text{ or } \sigma_v^2 = C(1 - F(\frac{10}{20}, \frac{50}{80} = \frac{50}{80})) = 5 * (1 - 0.55) = 2.25, \text{ donc } 2.25/3 = 0.75 \%^2 \text{ (Abaque 3)}$$

Réponse:

0.75 %²

Question 3 (16 points) – Propriété de la variance de bloc et de dispersion

8 pts a) Soient les deux modèles de variogramme présentés sur la figure ci-dessous. Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau 1 seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculées avec les modèles A et B.

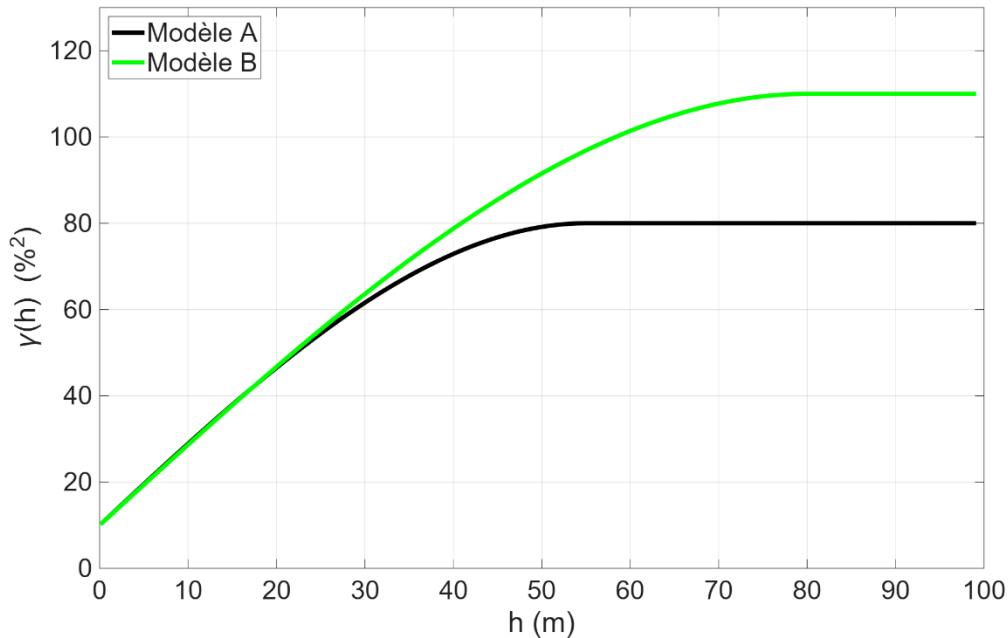


Tableau 1) Réponse à la question 3a.

		Semblable Oui (O) ou Non (N)
a)	La variance de la teneur d'un bloc de 10 m x 10 m	N
b)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 20 m x 20 m	O
c)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 10 m	O
d)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 20 m x 20 m	O
e)	La variance de la teneur d'un bloc de 100 m x 100 m	N
f)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 100 m x 100 m	N
g)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 40 m	N
h)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 100 m x 100 m	N

-1pt par mauvaise réponse

8 pts b) Soient les deux modèles de variogramme présentés sur la figure ci-dessous. Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau 2 seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculées avec les modèles C et D.

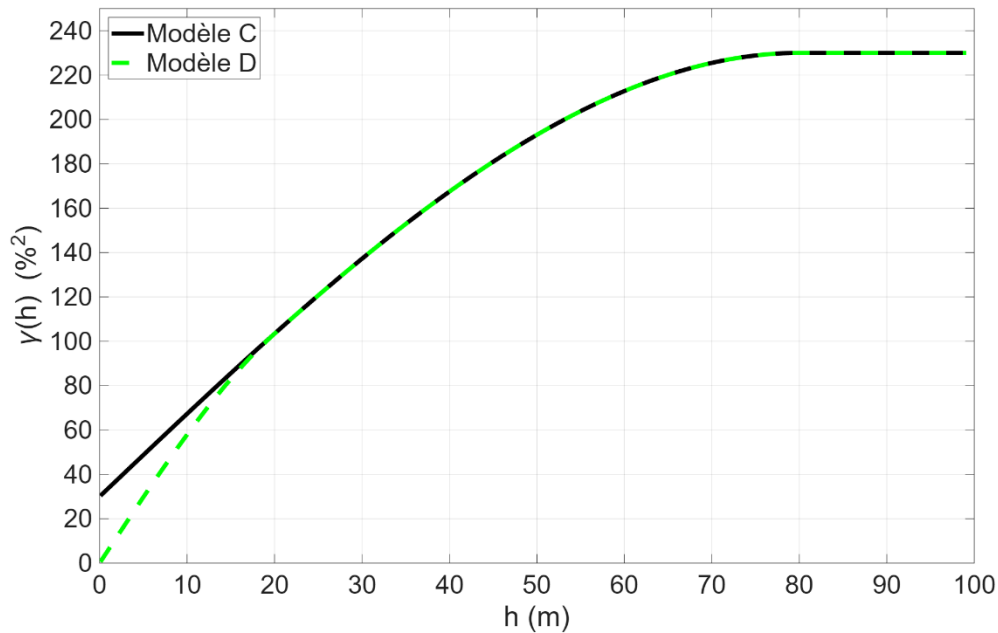


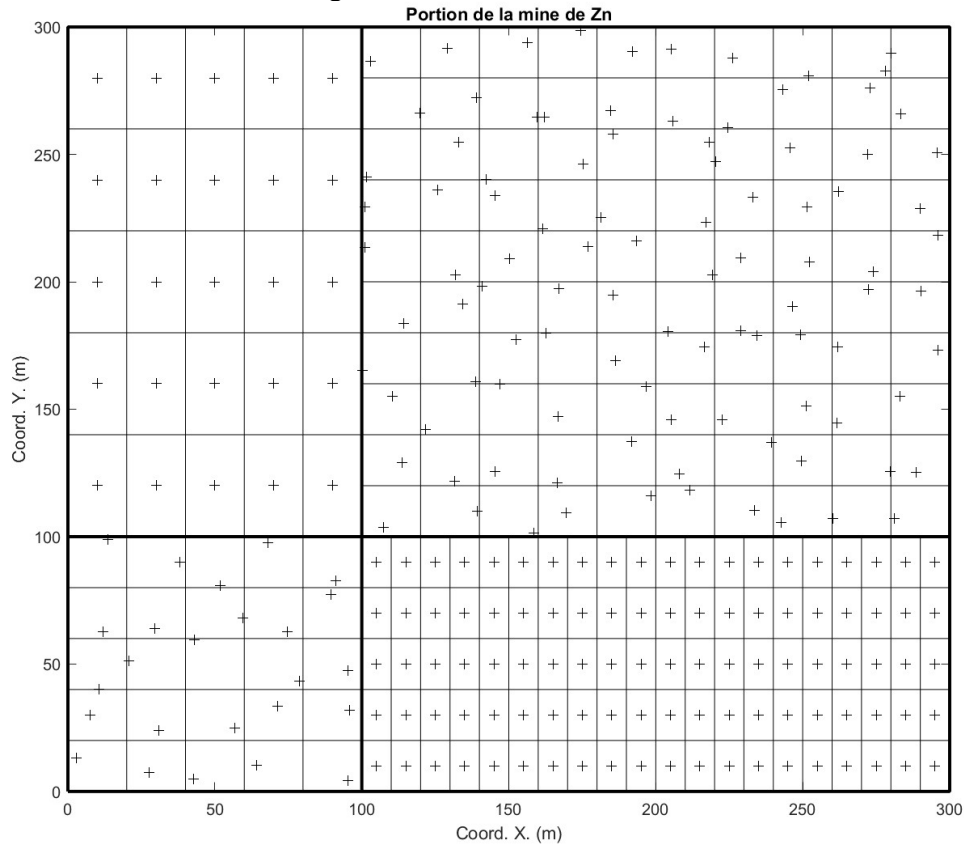
Tableau 2) Réponse à la question 3b.

		Semblable Oui (O) ou Non (N)
a)	La variance de la teneur d'un bloc de 10 m x 10 m	N
b)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 20 m x 20 m	N
c)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 10 m	N
d)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 20 m x 20 m	N
e)	La variance de la teneur d'un bloc de 100 m x 100 m	O
f)	La variance de dispersion pour un bloc de 5 m x 5 m dans un bloc 100 m x 100 m	N
g)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 40 m	O
h)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 100 m x 100 m	N

-1pt par mauvaise réponse

Question 4 (16 points) – Variance d'estimation et principes de combinaison d'erreurs élémentaires

La figure suivante montre l'emplacement des échantillons dans une portion d'une mine de zinc. On distingue quatre zones et quatre patrons d'échantillonnage différents (pour les zones nord-ouest et sud-est, vous pouvez considérer que l'échantillonnage est aléatoire stratifié avec un échantillon par cellule). Les teneurs (% Zn) sont mesurées sur des épaisseurs constantes de 5 m, correspondant à l'épaisseur des bancs de la mine, et servent à calculer le variogramme 2D des teneurs en Zn.



Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en Zn pour l'ensemble de la zone si le variogramme est sphérique isotrope avec $C_0=6\%^2$, $C_1=30\%^2$ et $a=80\text{ m}$? Répondez en complétant le tableau de la page suivante.

Question 4 (suite)

Zone	Nombre de forages	Taille des blocs	Variance pour la zone	Surface de la zone
1-NO	5x5=25	20 par 40	Type de grille : Aléatoire Calcul $\text{var}(e_1)$: $6+30 \cdot E(20/80, 40/80) = 6+30 \cdot 0.145 = 10.35$ $10.35/25 = 0.4940$	100*200=20000
2-NE	10x10=100	20 par 20	Type de grille : Stratifiée Calcul $\text{var}(e_2)$: $6+30 \cdot F(20/80, 20/80) = 6+30 \cdot 0.17 = 11.1$ $11.1/100 = 0.111$	200*200=40000
3-SO	5x5=25	20 par 20	Type de grille : Stratifiée Calcul $\text{var}(e_3)$: $6+30 \cdot F(20/80, 20/80) = 6+30 \cdot 0.17 = 11.1$ $11.1/25 = 0.444$	100*100=10000
4-SE	20x5=100	10 par 20	Type de grille : Aléatoire Calcul $\text{var}(e_4)$: $6+30 \cdot E(10/80, 20/80) = 6+30 \cdot 0.07 = 8.1$ $8.1/100 = 0.081$	200*100=20000
Variance d'estimation de la teneur moyenne en Zn pour l'ensemble de la zone				
Calcul $\text{var}(e)$: $(20000^2 \cdot 0.4940 + 40000^2 \cdot 0.111 + 10000^2 \cdot 0.444 + 20000^2 \cdot 0.081) / (300 \cdot 300)^2 = 0.0521 \text{ \%}^2$ 2.5pts $\text{var}(e_1)$, 2.5pts $\text{var}(e_2)$, 2.5pts $\text{var}(e_3)$, 2.5pts $\text{var}(e_4)$, 2.5pts $\text{var}(e)$ Pour les $\text{var}(e_i)$: -0.5pts mauvais abaque, -0.5 erreur rapport (L/a), -0.5pts erreur transcription des données, -0.5pts si mauvais comptage du nombre de données, -0.5pts si oublie de l'effet de pépité, -0.5 pts erreur formule, -0.5 mauvaise lecture des paramètres Pour $\text{var}(e)$, -2.5pts si mauvaise formule, -1pts si erreur de calcul malgré le suivi des erreurs.				

Question 5 (8 points) – Variance d'estimation et effet de support

Une zone d'un gisement 3D d'or est délimitée à partir de 30 forages verticaux de 120 m de long chacun. Les forages sont disposés sur une grille régulière, espacés de 50 m dans les directions x et y. Les carottes de 4 m analysées en continu tout le long du forage ont permis d'identifier un modèle de variogramme sphérique avec $C_0 = 25 \text{ ppm}^2$, $C_1 = 75 \text{ ppm}^2$ et présentant une anisotropie géométrique avec $a_x = a_y = 100 \text{ m}$ et $a_z = 60 \text{ m}$. On considère le modèle isotrope dans le plan horizontal formé par les axes x et y.

Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en or pour l'ensemble de la zone couverte par les 30 forages ?

On a 30 parallélépipèdes de 120m de long x 50m x 50m .

On peut utiliser l'abaque 3D de la variance d'estimation. On a $120/4=30$ carottes dans chaque forage.

Donc pour un bloc : $\text{Var}(e) = 25/30 + 75 \cdot E(50/100, 120/60) = 25/30 + 75 \cdot 0.025 = 2.708$.

Pour l'ensemble des 30 forages, on obtient : $2.708/30 = 0.0902 \text{ ppm}^2$

- 1 pt : Erreur dans le choix de l'abaque.
- 0.5 pt Erreur rapport, Erreur calcul, Erreur typographique
- 2 pts, Erreur formule pour un forage : $\text{var}(e1)=c0/n+C1E$
- 2 pts, Erreur formule $\text{var}(e)=\text{var}(e1)/30$,
- 2 pts, oublie du $n=120/4=30$,
- 1 pt, Valeur de l'abaque : $E(50/100, 120/60) = 0.025$

Question 6 (12 points) – Impact du modèle de variogramme sur le krigeage

Le tableau suivant présente 8 modèles de variogramme. La figure de la page suivante présente les résultats d'un krigeage 1D effectué à partir des mêmes points d'échantillon et de chacun des modèles du tableau. Les figures de gauche présentent la valeur estimée par krigeage ordinaire en fonction de la coordonnée x , et les figures de droite présentent la variance de ce krigeage en fonction de la coordonnée x .

Associez une figure (de A à H) à chacun des modèles du tableau (répondez dans le tableau).

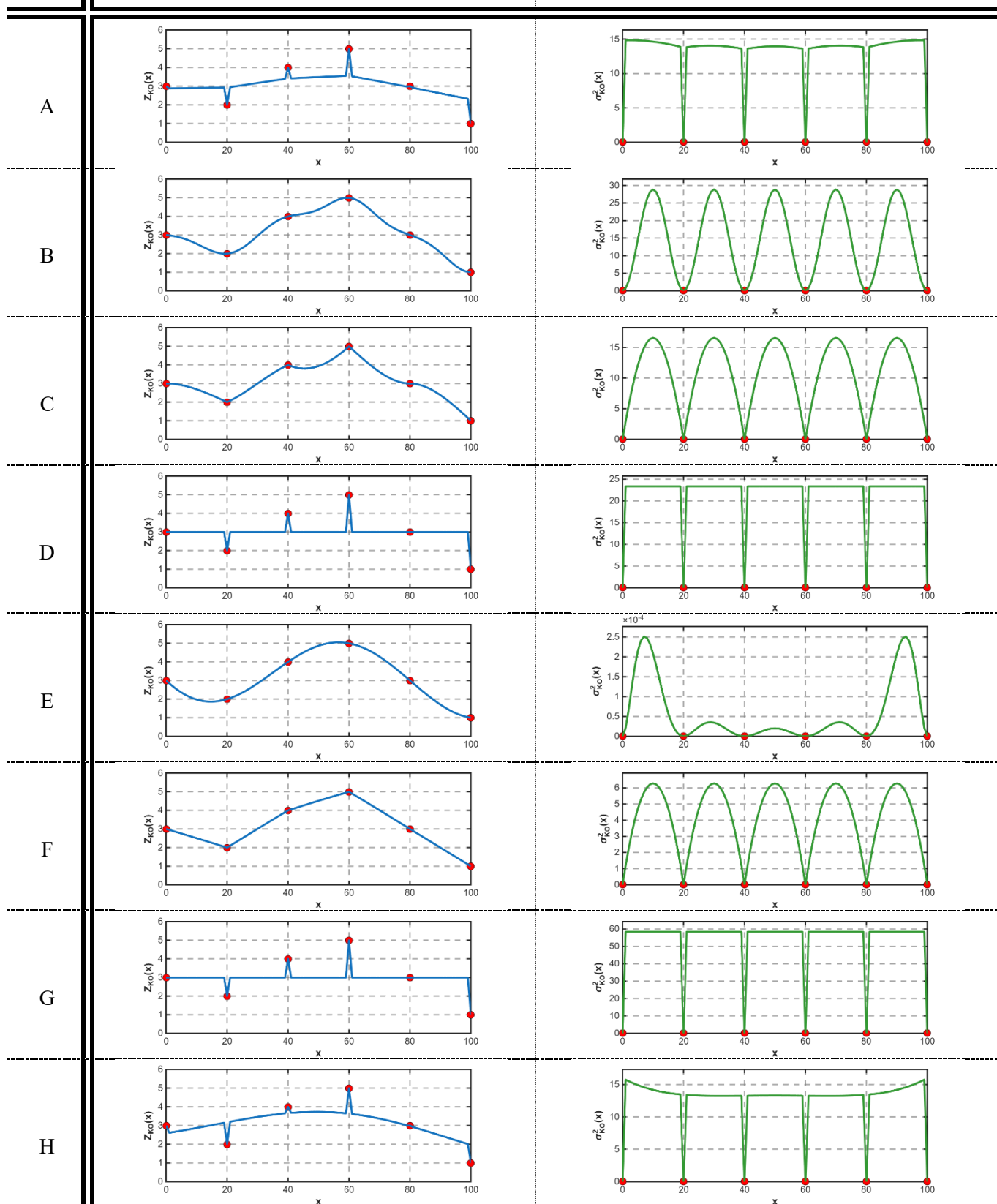
Modèle #	Description	Figure associée (A à H)
1	<i>Sphérique $a = 120, C_1 = 50$</i>	<i>F</i>
2	<i>Sphérique $a = 20, C_1 = 20$</i>	<i>C</i>
3	<i>Sphérique, $a=120, C_0 = 10, C_1 = 10$</i>	<i>A</i>
4	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 120, C_1 = 50$</i>	<i>E</i>
5	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 120, C_0 = 10, C_1 = 40$</i>	<i>H</i>
6	<i>Gaussien $a_{\text{effectif}} = 20, C_1 = 50$</i>	<i>B</i>
7	<i>Effet de pépité pur avec $C_0 = 20$</i>	<i>D</i>
8	<i>Effet de pépité pur avec $C_0 = 50$</i>	<i>G</i>

-1.5pts par mauvaise réponse

Figure

Valeurs estimées par krigeage ordinaire

Variance de krigeage ordinaire



Question 7 (12 points) – Construire et résoudre un système de krigeage

Un gisement d'or 2D présente un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 0° . Les paramètres du modèle sont $C_0=2 \text{ ppm}^2$, $C_1=8 \text{ ppm}^2$, $a_0=60 \text{ m}$, $a_{90}=30 \text{ m}$.

On souhaite effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnées (0, 0). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	-10	-10	3.1
2	-5	10	2.5
3	10	-5	7.1
4	10	5	2.1

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{pmatrix} 10 & A & 1.15 & 0.90 & 1 \\ B & C & 1.99 & 2.44 & 1 \\ 1.15 & 1.99 & 10 & 6.02 & 1 \\ 0.90 & 2.44 & D & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.73 \\ 5.22 \\ 4.04 \\ G \\ H \end{pmatrix}$$

8 pts a) Que valent les entrées A à G ?

$$A=B, C=10, D=6.02, E=1, F=0, G=4.04, H=1$$

$$\text{Pour trouver } A : \text{distance } 1-2 = \sqrt{(-10-5)^2 + (-10-10)^2} = 20.62 \text{ m}$$

$$\text{azimut } 1-2 = \text{atan}(20/5) = 75.96^\circ$$

$$\theta = 90 - 75.96 = 14.04^\circ$$

$$a_{\theta} = 60 \cdot 30 / [30^2 \cos(14)^2 + 60^2 \sin(14)^2]^{0.5} = 55.34 \text{ m}$$

$$C(h_{12}) = 8 * [1 - (1.5 (20.62/55.34) - 0.5 (20.62/55.34)^3)] = 3.73 \text{ ppm}$$

4 pt pour A et B

1.5 pt pour G (voir que G est à la même distance que cov(Z3,Z0))

0.5 pt le reste.

Réponse:

$$A = 3.73$$

$$B = 3.73$$

$$C = 10$$

$$D = 6.02$$

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 4.04$$

$$H = 1$$

Le système de krigeage est résolu et on obtient les poids suivants : $\lambda_1=0.2164$, $\lambda_2=0.3789$, $\lambda_3=0.2168$ et $\lambda_4=0.1879$. Le multiplicateur de Lagrange est $\mu = -0,2630$.

2 pts b) Estimez la teneur au point de coordonnées (0, 0) par krigeage ordinaire.

$$Z_0 = 0.2164 \cdot 3.1 + 0.3789 \cdot 2.5 + 0.2168 \cdot 7.1 + 0.1879 \cdot 2.1 = 3.5521$$

2 pts réponse, -1 pt erreur de formule, -0,5 pt erreur de calculatrice ou de retranscription.

Réponse:

3.5521 %

2 pts c) Calculez la variance de krigeage ordinaire.

$$\text{Var}(e) = 10 - (0.2164 \cdot 3.73 + 0.3789 \cdot 5.22 + 0.2168 \cdot 4.04 + 0.1879 \cdot 4.04) - (-0.2630) = 5.84$$

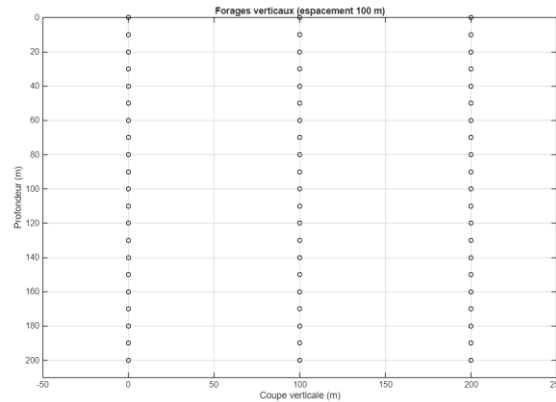
2 pts réponse, -1 pt erreur de formule, -0,5 pt erreur de calculatrice.

Réponse:

5.84 %2

Question 8 (8 points) – Estimation par krigeage en utilisant un voisinage local

La figure suivante illustre trois forages verticaux espacés de 100 m. Les centres des composites sont situés tous les 5 m, soit 21 par forage. Le variogramme est sphérique, avec une anisotropie géométrique et des portées principales $a_x = 200$ m et $a_z = 75$ m. On effectue le krigeage pour estimer les valeurs ponctuelles sur une grille régulière de points à 2 m d'intervalle.



Le tableau ci-dessous présente différentes stratégies de délimitation du voisinage utilisées pour le krigeage de chaque point. Le nombre de données indiqué correspond à un **maximum** : si plus de données sont disponibles, seules les plus proches, conformes à la stratégie de recherche, sont conservées.

6 pts a) Indiquez dans le tableau si la stratégie est adéquate (O) ou non (N). Une stratégie est considérée comme adéquate lorsqu'elle ne provoque pas de discontinuité dans les résultats du krigeage.

Stratégie	Description	O ou N
A	Recherche circulaire de rayon 150 m; 30 points	O
B	Recherche circulaire de rayon 150 m; 3 points par quadrant.	O
C	Recherche circulaire de rayon 50 m; 30 points	N
D	Recherche circulaire de rayon 150 m; 6 points	N
E	Recherche elliptique, 150 m selon x, 50 m selon z; 30 points	O
F	Recherche elliptique, 75 m selon x, 150 m selon z; 30 points	N

-1pt par mauvaise réponse

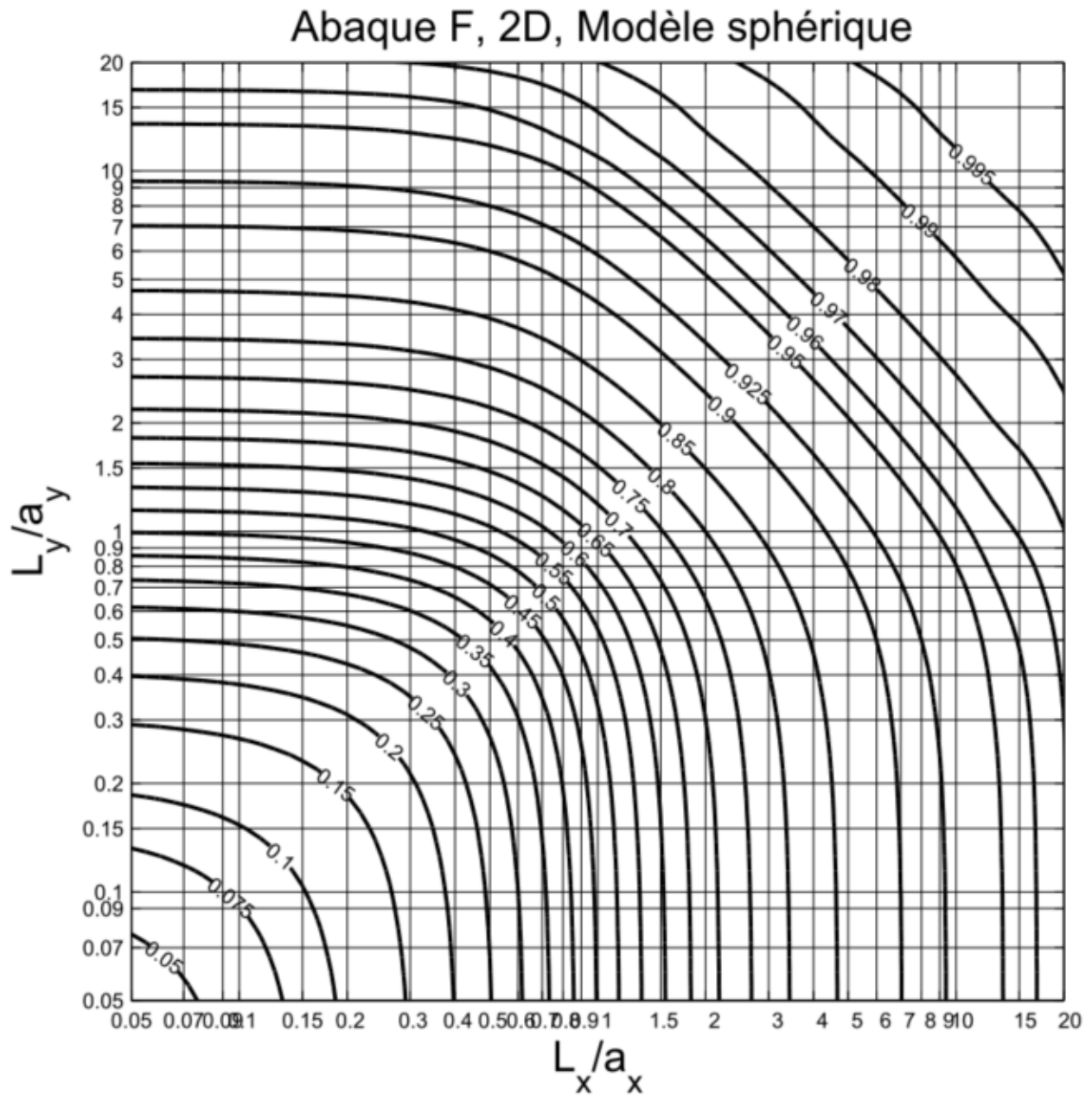
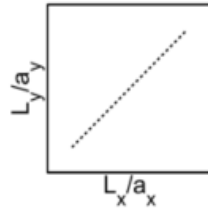
2 pts b) Pourquoi n'est-il pas recommandé d'utiliser la stratégie de validation croisée "leave-one-out" pour des forages en 3D ?

La validation croisée leave-one-out n'est pas recommandée pour des forages en 3D, car les échantillons d'un même forage sont spatialement très proches les uns des autres et donc fortement corrélés. Retirer un seul échantillon revient alors à l'estimer à partir de ses voisins immédiats du même forage, ce qui surestime artificiellement les performances du modèle.

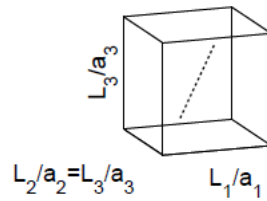
On privilégie plutôt une validation croisée par blocs ou par forages entiers, afin de tester la capacité du modèle à prédire dans des zones spatialement indépendantes.

Abaques

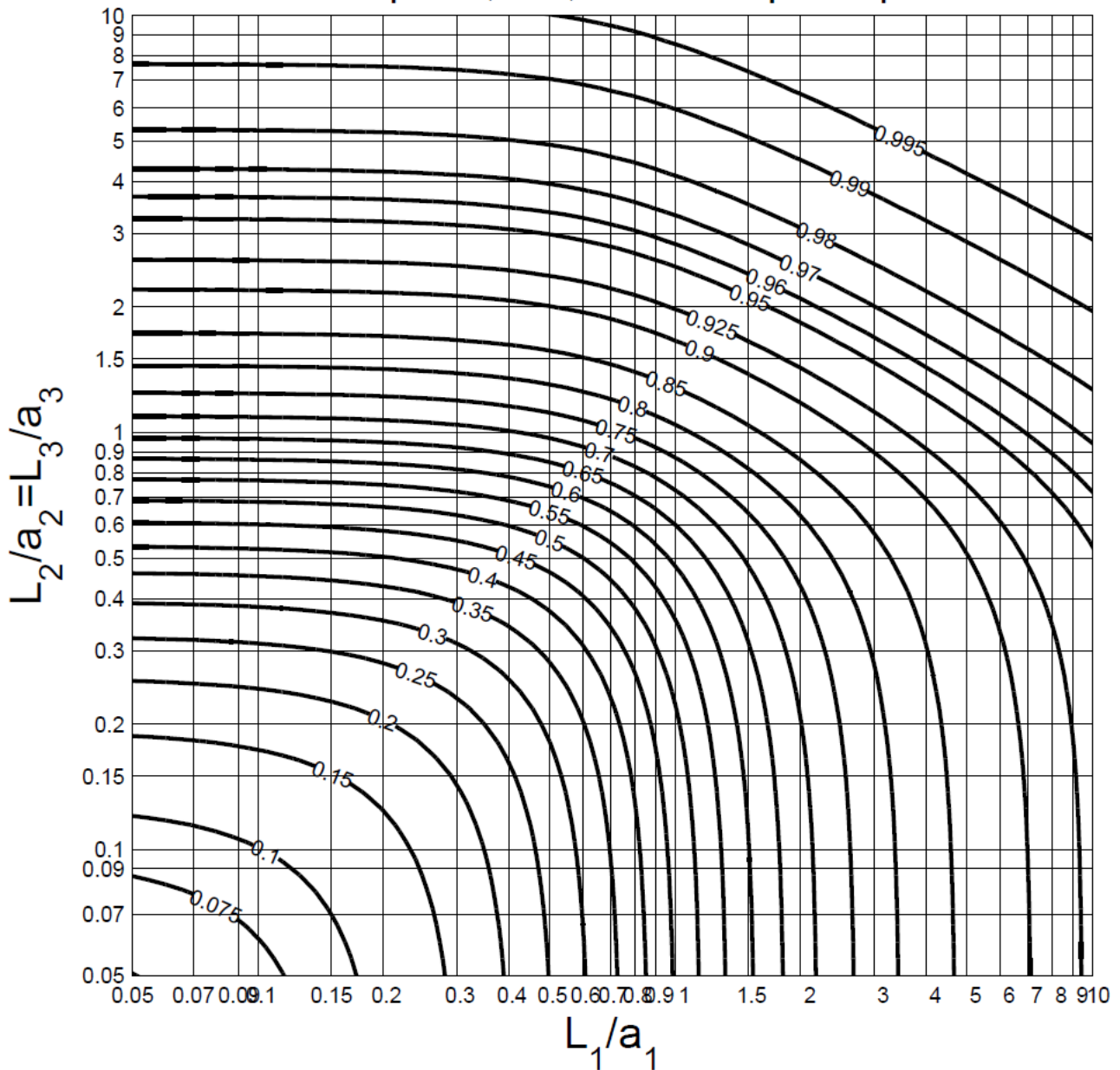
1- Variance de dispersion d'un point dans un rectangle, modèle sphérique



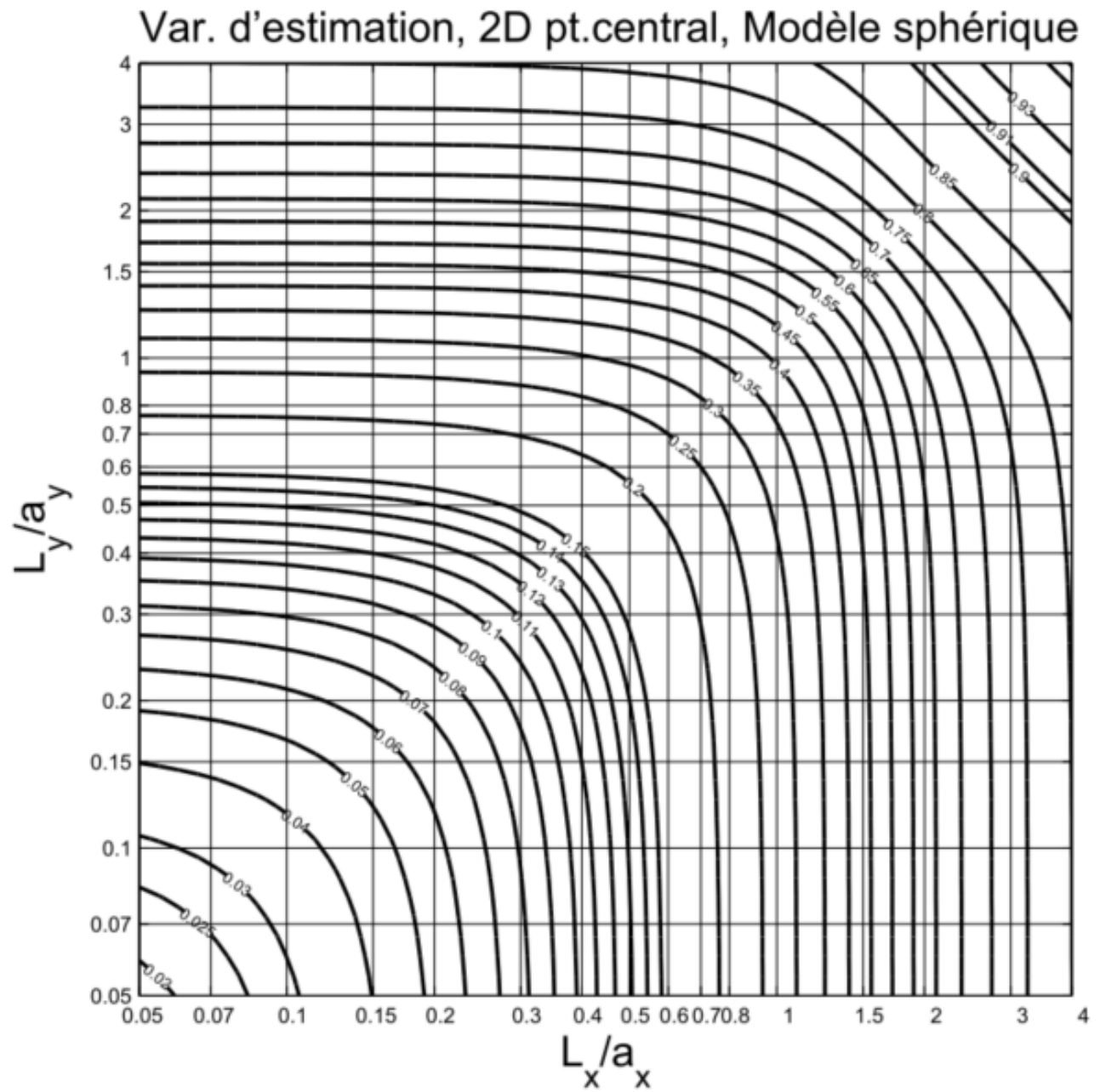
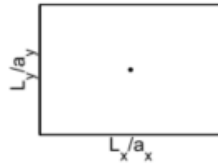
2- Variance de dispersion d'un point dans un prisme rectangulaire, modèle sphérique



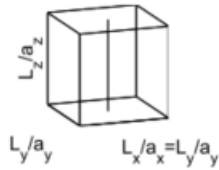
Abaque F, 3D, Modèle sphérique



3- Variance d'estimation d'un rectangle par son point central, modèle sphérique



4- Variance d'estimation d'un bloc à section carrée par le forage central, modèle sphérique



Var. d'estimation, 3D, Forage central, Modèle sphérique

