

Notes : Vous répondez sur le questionnaire.

Écrivez lisiblement

Fournir le détail des calculs et justifier vos réponses lorsque requis. Ne pas oublier d'indiquer les unités.

Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire (p. 14-15)

Le professeur et les surveillants ne répondent à aucune question durant l'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.

Deux feuilles recto-verso d'aide-mémoire sont permises.

Toute calculatrice permise.

L'examen comprend 8 questions totalisant 100 points et réparties sur 15 pages.

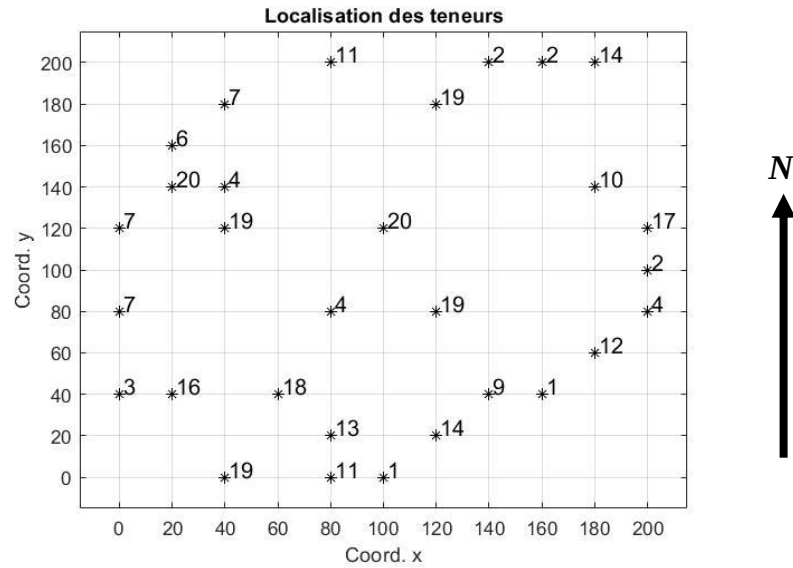
Dans l'ordre : Q1-12pts, Q2-10pts, Q3-18pts, Q4-12pts, Q5-16pts, Q6-10pts, Q7-12pts, Q8-10pts

Nom de l'étudiant : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question 1 (12 points)

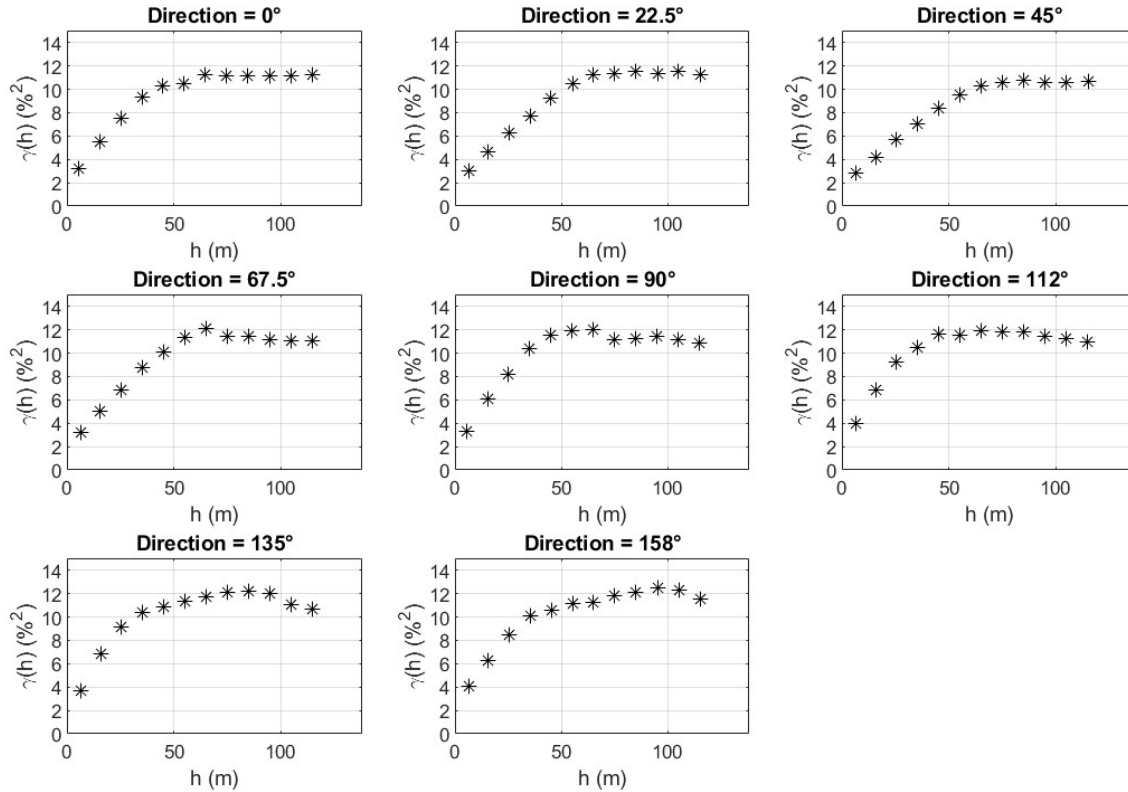
- 8 pts a) Calculez le variogramme expérimental des données suivantes (teneur exprimée en %) dans la direction (azimut) 0° pour une distance de 40 m exactement et puis dans la direction (azimut) 135° pour une distance de $(20^2 + 20^2)^{1/2}$ m exactement.



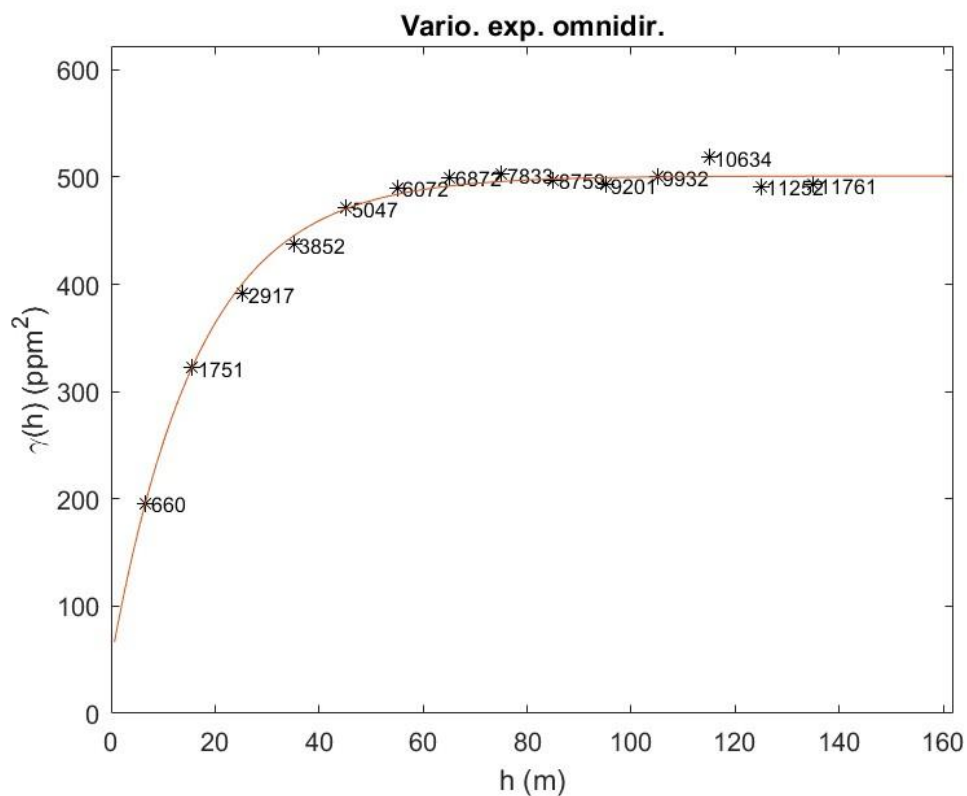
- 4 pts b) On effectue le krigeage ordinaire sur une grille régulière de 20m en partant du point (10 m, 10 m) avec les données de la question a). Le krigeage utilise toutes les données observées pour kriger les points de la grille. Le modèle de variogramme retenu est sphérique avec un effet de pépité. On calcule ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées. Est-ce que le variogramme expérimental des valeurs krigées sera bien ajusté par le modèle utilisé pour réaliser le krigeage? Justifiez

Question 2 (10 points)

7 pts a) Pour un banc d'une mine de cuivre, on calcule les variogrammes expérimentaux des teneurs, exprimées en % Cu, selon différentes directions et avec une tolérance angulaire de 10 degrés. Ajustez un seul modèle de variogramme 2D à ces variogrammes expérimentaux.



3 pts b) Une firme de génie-conseil fournit l'ajustement visuel suivant pour un variogramme expérimental omnidirectionnel des teneurs en or exprimées en ppm. Est-ce que le modèle théorique utilisé est adéquat? Peut-on garantir que le modèle théorique choisi soit le meilleur candidat ? Justifiez.



Question 3 (18 points)

Une cimenterie considère l'utilisation d'une pile de pré-homogénéisation pour réduire la variabilité de la teneur en C3S du ciment. Son système d'échantillonnage fournit une analyse aux 30 minutes qui représente précisément la teneur de tout le ciment produit durant cette période. La compagnie désire que les teneurs observées aux 30 min soient les plus constantes possibles sur la durée de l'exploitation de la carrière. À la carrière, le variogramme 2D des teneurs de C3S (composites sur l'épaisseur totale du banc (5m)) est sphérique avec anisotropie géométrique et $C_0=10\%^2$, $C_1=35\%^2$, $a_x=100\text{m}$, $a_y=40\text{m}$. Les dimensions de la carrière sont considérées grandes par rapport aux portées observées.

La compagnie envisage choisir entre 2 piles différentes pour lesquelles elle reçoit des soumissions :

Pile	Tonnage de la pile (Dimensions à la carrière en x, y, z)	Coût
Petite	13.5 Kt (20m x 50m x 5m)	10M\$
Moyenne	54 Kt (100m x 40m x 5m)	18M\$

La compagnie considère qu'une variance des teneurs aux 30 min de $10\%^2$ en C3S (sur la durée de vie de la carrière) est le maximum acceptable.

8 pts a) Tenant compte de ces informations, démontrez qu'aucune pile ne permet de répondre au critère de la compagnie minière concernant la variance des teneurs aux 30 minutes inférieur à $10\%^2$ en C3S. Faites les calculs requis.

Question 3 (suite)

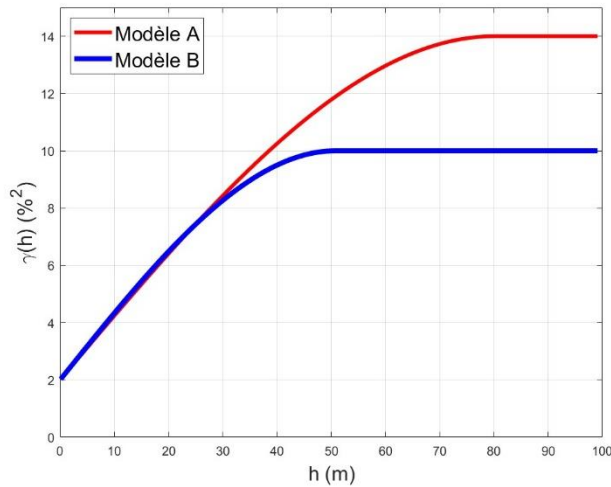
4 pts b) Proposez une solution rapide permettant de réduire considérablement la variabilité de la pile moyenne qui répondra au critère de la compagnie minière concernant la variance des teneurs aux 30 minutes inférieur à $10\%^2$ en C3S. Faites les calculs requis.

3 pts c) Quel variogramme expérimental obtiendrait-on sur les analyses prélevées aux 30 min en supposant que l'on calcule le variogramme uniquement avec les données provenant d'une seule et même pile et que le volume traité durant 30 min représente une tranche verticale uniforme dans la pile, et qu'il n'y a aucun effet de bout de pile ?

3 pts d) Si l'on calcule le variogramme cette fois en utilisant les données sur une très longue période (et donc provenant d'un grand nombre de piles différentes), vers quel palier devrait converger le variogramme expérimental ?

Question 4 (12 points)

Indiquez pour les questions a) à d) ci-contre si les deux modèles fournissent des réponses très semblables ou non.? Justifiez chacune des réponses.



3 pts a) La variance de blocs pour un bloc de 25m x 25m?

3 pts b) La variance de dispersion pour un bloc de 5m x 5m dans un bloc de 40m x 40m?

3 pts c) La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 10m x 10m ?

3 pts d) La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances inférieures à 30m ?

Question 5 (16 points)

9 pts a) Déterminez les entrées A à G selon les informations suivantes : variogramme exponentiel avec anisotropie géométrique, $C_0=1.25 \text{ } \%^2$, $C_1=5.75 \text{ } \%^2$, $a_{60}=25 \text{ m}$ et $a_{150}=65 \text{ m}$. (Note : il s'agit des portées effectives et les directions sont des azimuts.)

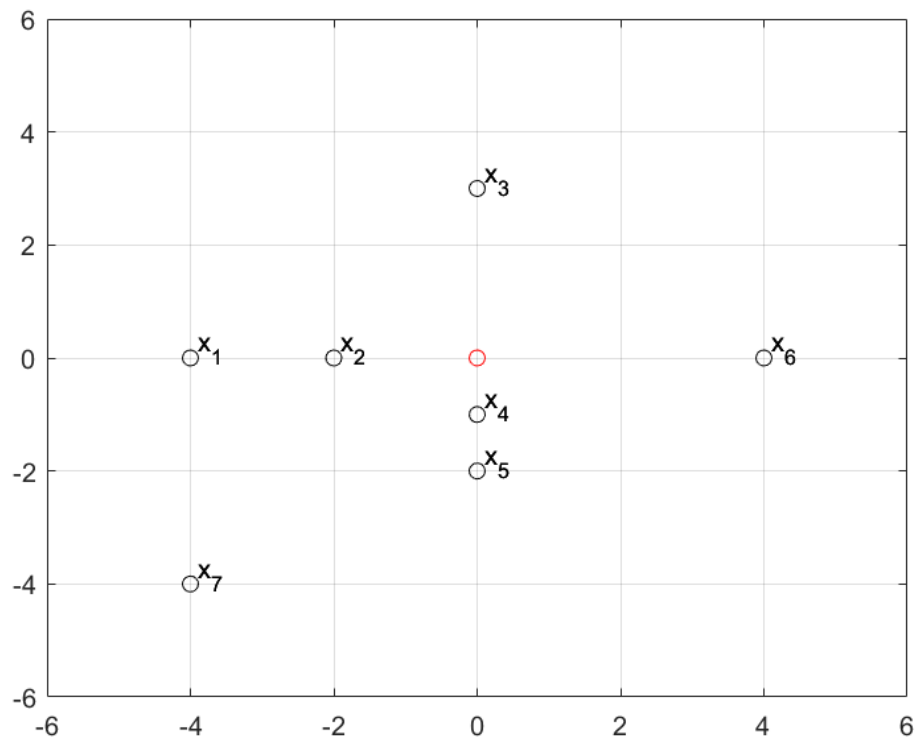
Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (%)
1	10	10	1.57
2	18	15	2.34
3	8	11	0.48
4	13	12	1.98
Estimé	15	15	?

$$\begin{pmatrix} 7 & A & 4.85 & 3.73 & 1 \\ B & 7 & 1.60 & 2.86 & 1 \\ 4.85 & 1.60 & C & D & 1 \\ 3.73 & 2.86 & 3.21 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.52 \\ 4.18 \\ 2.19 \\ 3.87 \\ G \end{pmatrix}$$

Question 5 (suite)

2 pts b) On vous informe que seule la troisième donnée a été obtenue en utilisant une procédure d'analyse moins précise, ce qui ajoute une erreur indépendante de variance de $0.5 \text{ } \%$ aux résultats de l'analyse. Comment adapteriez-vous le système de krigage en (a) pour prendre en considération cette nouvelle information ?

5 pts c) Placez en ordre croissant, de la plus faible à la plus élevée, la valeur des poids de krigage simple que l'on obtiendrait selon la configuration suivante. Si le poids de krigage simple peut-être déterminée exactement, mentionnez la valeur. (Supposez qu'il n'est pas possible d'obtenir des poids négatifs avec cette configuration)

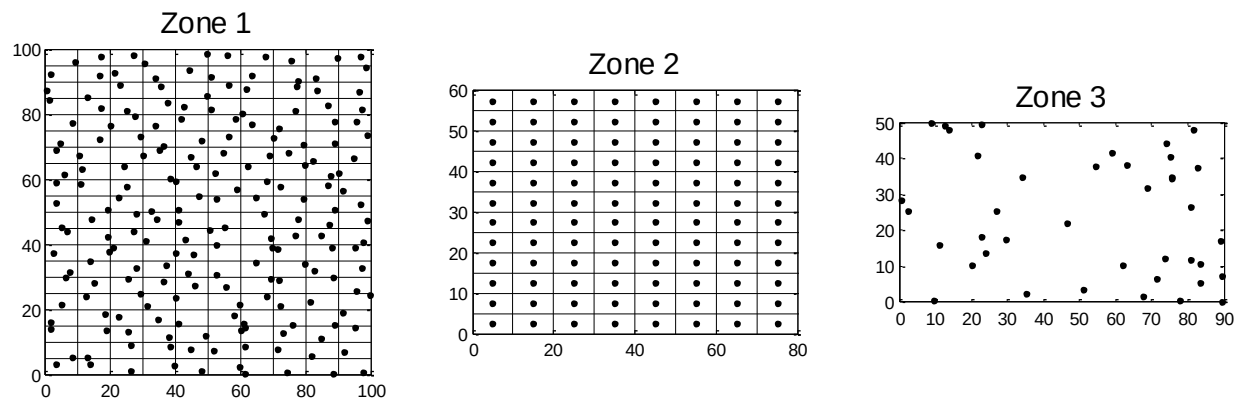


Question 6 (10 points)

La figure ci-dessous illustre trois zones distinctes, chacune avec une épaisseur de 5 mètres, dans un gisement de cuivre. Les variogrammes sont calculés à partir de la teneur moyenne des forages sur toute l'épaisseur du niveau. Chaque zone dispose d'un échantillonnage particulier et d'un variogramme spécifique. L'origine de chaque zone a été reportée en (0,0) pour faciliter les calculs.

La teneur moyenne de la troisième zone a été estimée par un processus de krigeage global englobant l'ensemble de cette zone. La variance de krigeage obtenue pour la troisième zone est de 0.13% . Vous trouverez les estimations des teneurs moyennes et les modèles de variogramme bidimensionnels associés dans le tableau ci-dessous :

Zone	Teneur moyenne	Modèle
Zone 1	2.1%	Sphérique isotrope, $a=20\text{m}$, $C_0=5\%^2$, $C_1=20\%^2$
Zone 2	1.8%	Sphérique anisotrope, $a_x=20\text{m}$, $a_y=10\text{m}$, $C_0=7\%^2$, $C_1=12\%^2$
Zone 3	2%	Exponentiel isotrope, $a_{\text{effectif}}=60\text{m}$, $C_0=1\%^2$, $C_1=10\%^2$



Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne de l'ensemble des trois zones?

Question 6 (suite)

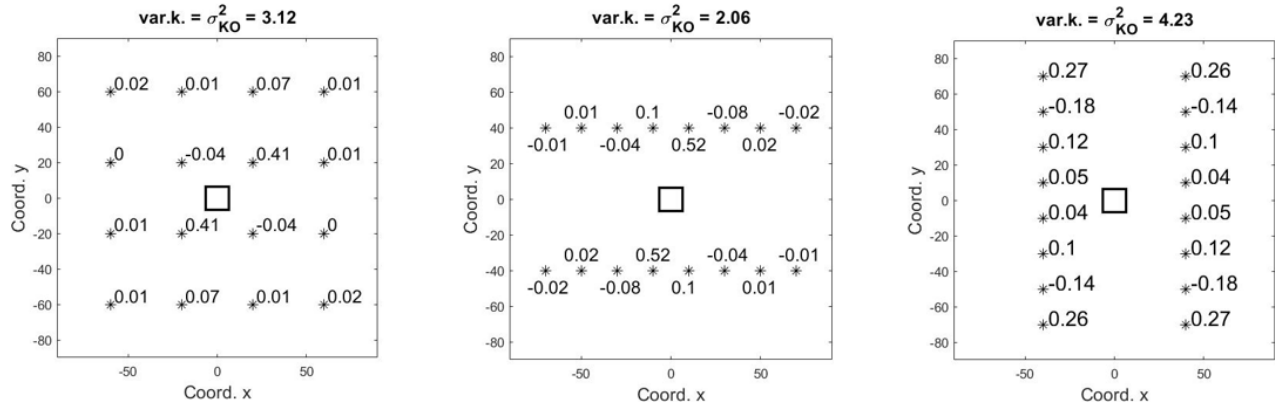
Question 7 (12 points)

Fournissez des réponses brèves et explicites aux énoncés suivants en trois phrases ou moins.

- 3 pts a) *Décrivez l'impact des erreurs de localisation des observations sur les variogrammes expérimentaux.*
- 3 pts b) *Dans un contexte minier (3D), pourquoi est-il généralement préférable de calculer les variogrammes expérimentaux selon les orientations (i.e., direction et plongé) coïncident avec les orientations de forages? Identifiez deux raisons.*
- 3 pts c) *Dans un contexte minier (3D), quel problème peut se poser lorsque l'on calcule les variogrammes expérimentaux selon les orientations (i.e., direction et plongé) coïncident avec les orientations de forages lorsqu'une anisotropie géométrique est suspectée? Identifiez deux raisons.*
- 3 pts d) *Une erreur dans une base de données minière fait que deux données différentes se trouvent à avoir exactement les mêmes coordonnées. Que se passera-t-il lors du krigeage si le voisinage de recherche inclut ces deux données? (Indice : pensez à votre cours d'algèbre linéaire)*

Question 8 (10 points)

Trois patrons d'échantillonnage différents avec 16 observations chacun (astérisques) sont utilisés pour estimer une même zone centrale d'un gisement (le carré noir). Les poids de krigeage sont indiqués à côté de chaque donnée. De plus, la variance de krigeage est fournie pour chaque patron dans le titre de chaque figure.



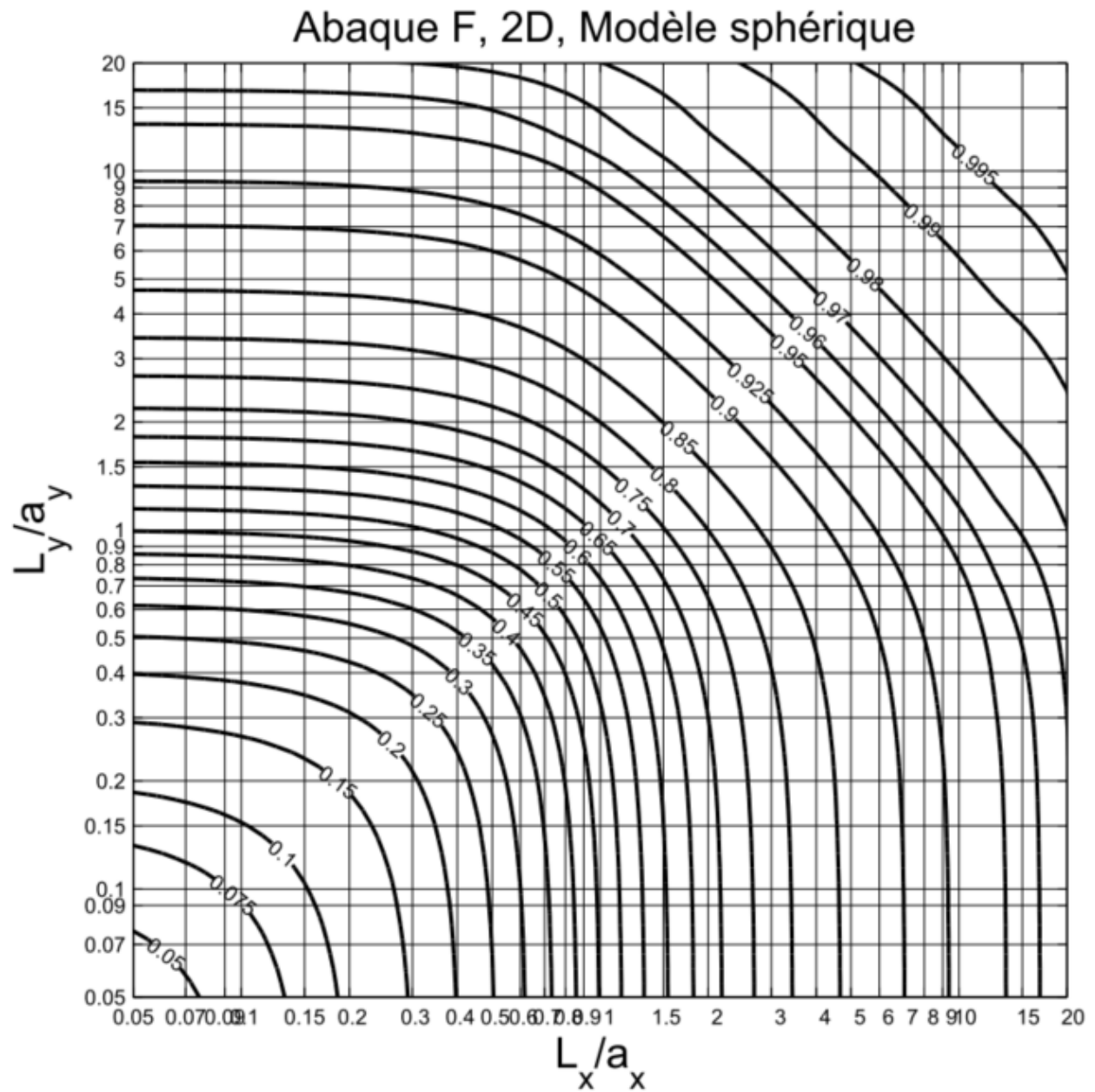
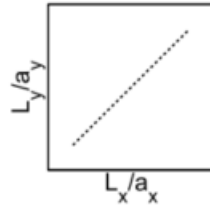
2 pts a) Quel patron d'échantillonnage est le mieux adapté pour effectuer l'estimation de la zone centrale de ce gisement (gauche, milieu ou droite) ? Justifiez.

5 pts b) À partir des poids de krigeage des trois patrons d'échantillonnage, que peut-on déduire sur la continuité spatiale de ce gisement ? Justifiez.

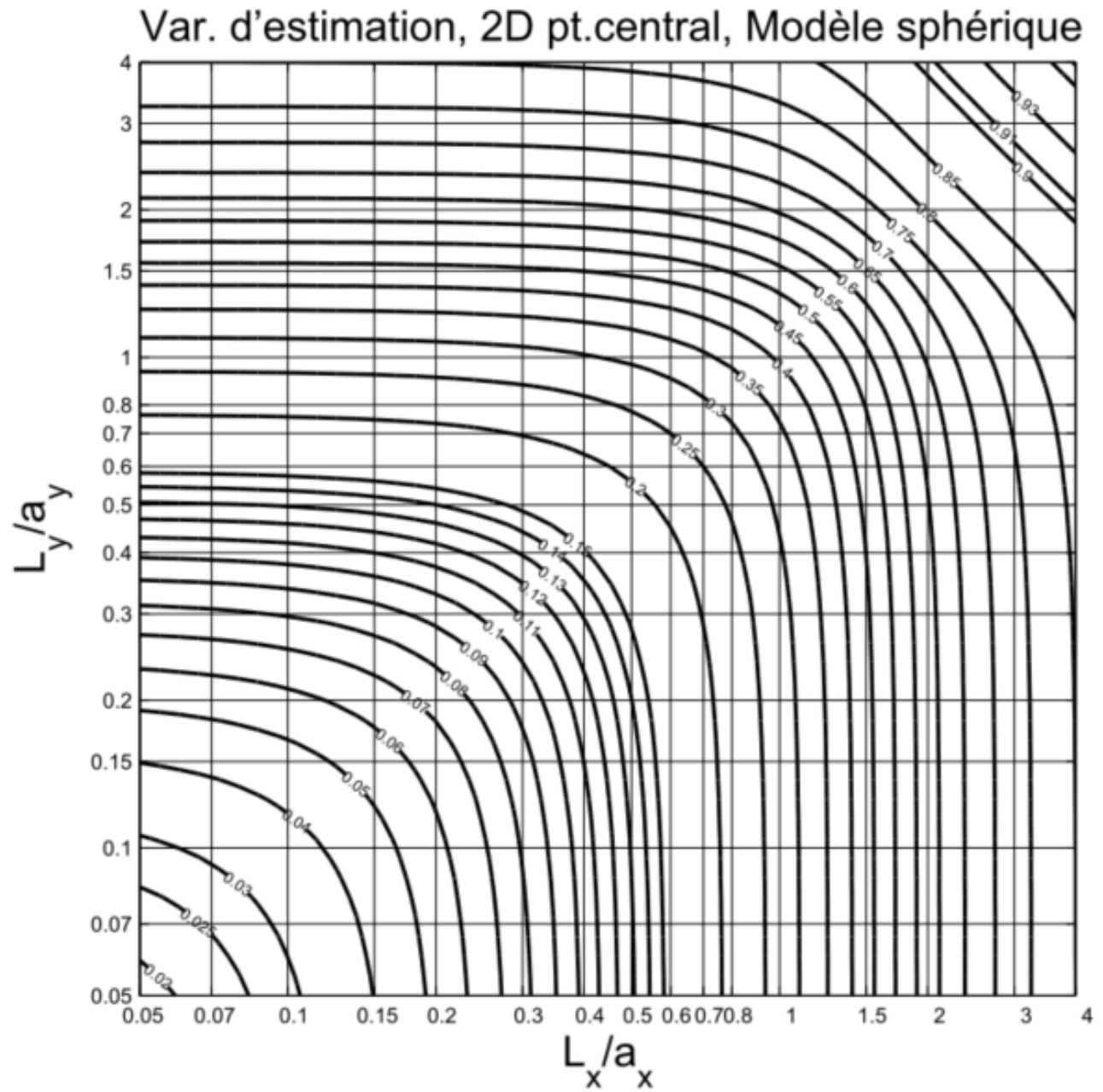
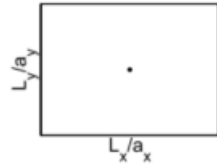
3 pts c) Expliquez les avantages de privilégier un patron d'échantillonnage orientée vers la petite continuité spatiale.

Abaques

1- Variance de dispersion d'un point dans un rectangle, modèle sphérique



2- Variance d'estimation d'un rectangle par son point central, modèle sphérique



Corrigé :

Q1 a) $\gamma(40m, 0deg) = 1/(2*4) [(4-7)^2 + (4-17)^2 + (7-7)^2 + (3-7)^2] = 24.25 \%^2$

$\gamma(31.1, 135deg) = 1/(2*4) [(19-20)^2 + (17-7)^2 + (13-18)^2 + (1-13)^2] = 33.75\%^2$

4pts par direction, -0.5pts par couple erroné, -0.5pts erreur d'unités, -2pts mauvaise direction mais bonne identification des couples, -2pts mauvaise distance, mais bonne identification des couples, -2pts si erreur dans l'équation, -0.5pts erreur de calcul.

b) Non il ne sera pas bien ajusté pour 2 raisons. Premièrement l'effet de pépité sera complètement filtré puisque les valeurs krigées sont continues (on ne krige qu'en des points sans donnée). Deuxièmement, on a la propriété de lissage du krigeage qui nous dit que la variance des valeurs krigées sera inférieure à la variance des données. Donc le plateau sera inférieur (ceci demeure vrai même s'il n'y a pas d'effet de pépité). Une ou l'autre de ces raisons est suffisant.

0pts si répondu oui, 2pts si répondu non, 2pts pour la justification.

Q2 a) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La portée principale est selon la direction 45 degrés et la portée minimale selon 135. Les portées sont $a_g=80$ m et $a_p=40$ m. $C_0=2\%$ et $C_1=10\%^2$.

1pts pour chaque paramètre bien identifié

-0.5 calcul de C_1 , -0.5pts a_g trop faible (ou trop grand), -0.5 pts C_0 trop faible (ou trop grand), -0.5 mauvaise direction a_g et a_p , -1 si direction non mentionnée, -3 modèle non-mentionné, -4 anisotropie

b) Il n'a pas vérifié l'anisotropie. Un variogramme omnidirectionnel bien ajusté ne garanti pas qu'il n'y a pas présence d'un anisotropie.

Q3-

a) pour la petite pile : $C_1(1-F(20/100, 50/40)) = 35*(1-0.55) = 15.75\%^2$

pour la grande pile $C_1(1-F(100/100, 40/40)) = 35*(1-0.40) = 21\%^2$

Par pile, 4pts bonne réponse, -1 pts erreur rapport, -0.5 erreur de réécriture des données, -0.5pts si l'effet de pépité est incluse, -0.5pts erreur lecture abaque, -1 erreur de formule, -3pts si formule complètement erronée.

-2pts si la comparaison n'est pas réalisée et donne un scénario impossible. -1 pts si la comparaison n'est pas réalisée, mais le scénario est possible.

b) Orienté la grande dimension du bloc dans la direction de petite continuité. Changer l'orientation de 90 degrés : on a ainsi pour la grande pile $C_1(1-F(40/100, 100/40)) = 35*(1-0.75) = 8.75\%^2$

c) Comme il n'y aurait pas de variation tant que l'on est dans la pile, le variogramme serait 0 pour tout Δt .

0 pts mauvaise réponse, 1pts si observé que les teneurs sont les mêmes, 2pts si répondu $\gamma=0$.

d) La variance que l'on verra sur une très longue période sera simplement la variance des blocs de la taille de la pile.

0pts si mauvaise réponse, 1pts si mentionner que le palier sera celui des piles, 2pts si mentionner que ce sera la réponse fournie en 2a.

Q4- 1pts pour la bonne réponse et 2pts la justification.

- a) La variance avec A sera plus grande qu'avec B, car le pallier de A est supérieur à celui de B. Ils ont aussi le même comportement variographique de 0 à 30m. $\text{Var}(\text{bloc}) = C - \gamma_{\text{mean}}$
- b) Les variances de dispersion seront différentes, car les blocs de 40mx40m auront une variance de blocs différente avec le modèle A et le modèle B.
- c) Les variances de dispersion seront similaires pour les deux variogrammes, car les variogrammes sont quasi-identiques de 0 à 30m, que les blocs sont de tailles inférieures à 30m et que l'effet de pépite est identique pour les deux modèles.
- d) Comme les deux variogrammes sont presque qu'identiques pour des distances inférieures à 30m, il n'y aura pas de grande différence entre le krigeage effectué avec A ou avec B. Les variances de krigeage seront alors très similaires.

Q5)

a)

$$A=B=1.8547,$$

$$C=7,$$

$$D=3.21,$$

$$E=1,$$

$$F=0,$$

$$G=1,$$

$$\text{Calcul pour A et B : distance des points 1 et 2} = \sqrt{(18-10)^2 + (15-10)^2} = 9.434 \text{ m}$$

$$\text{Angle des point 1-2 : } \theta_p = \arctan((15-10)/(18-10)) = \arctan(5/8) = 32.0054^\circ$$

$$\theta = 60 + 32.0054 = 92.0054 \text{ degrés}$$

$$a_{\theta} = 25 \cdot 65 / [25^2 \cos(92) + 65^2 \sin(92)]^{0.5} = 25.01 \text{ m}$$

$$C(h_{12}) = 5.75 \cdot [\exp(-3 \cdot 9.434/25.01)] = 1.85 \text{ ppm}^2$$

1pts réponse B=A, 1pts C=30, 1pts D=1, 1pts E=0, 1pts F=1, 1pts G=8.29, 3pts pour A=7.06.

-1pts erreur d'angle, -1pts erreur distance, -1pts erreur, -1pts petite erreur formule, -2 erreur de calcul majeur pour A, -0.5pts erreur calculatrice.

b) Il suffit d'ajouter $0.5 \%^2$ sur la diagonale à la 2^e position donc $7.5 \%^2$ au lieu de $7 \%^2$.

2pts si mentionné que C devient 7.5, -1pts si mentionné que ça affecte toutes la covariance avec le point 2, 0 sinon.

c) $x_6=x_7=0$; x_1 ; x_5 ; x_3 ; x_2 ; x_4

-0.5pts pour chaque mauvaise réponse. -1pts si pas mentionnez que x_6 et x_7 sont 0.

Q6.

Zone	nombre d'extensions élémentaires (points)	variance pour une extension	variance pour l'ensemble	surface de la zone
1	200	$5+20 \cdot F(10/20, 5/20) = 5+20 \cdot 0.3 = 11$	$8.2/200 = 0.055$	10000
2	96	$7+12 \cdot E(10/20, 5/10) = 7+12 \cdot 0.19 = 9.28$	$9.28/96 = 0.097$	4800
3	-	-	0.13	4500

Globalement : $(10000^2 \cdot 0.055 + 4800^2 \cdot 0.097 + 4500^2 \cdot 0.13) / 19300^2 = 0.0278 \%$

3pts var(e1), 3pts var(e2), 1pts var(e3), 3pts var(e_{total})

Pour var(e1) et var (e2) :-0.5pts mauvais abaque, -0.5 erreur rapport (L/a), -0.5pts erreur transcription des données, -0.5pts si mauvais comptage du nombre de données, -0.5pts si oubli de l'effet de pépité, -0.5 pts erreur formule, -0.5 mauvaise lecture des paramètres

Pour var(e3), bien identifier qu'il s'agit de la variance de krigeage

Pour var(etotal), -3 -3pts si mauvaise formule, -2 si utilisé les teneurs au lieu des volumes, -0.5pts si erreur de calcul malgré le suivi des erreurs.

Q7.

a) Augmente l'effet de pépité apparent sur les variogrammes

3pts si bonne justification, 2pts si répondu oui, mais mauvaise justification, 0pts sinon.

b) 1) Pour avoir suffisamment de paires et 2) pour avoir des distances mesurées sans erreur.

1.5pts par point juste, 0pts sinon.

c) On peut manquer de directions différentes pour pouvoir détecter et modéliser une éventuelle anisotropie.

3pts si bonne justification, 1pts si la justification mène vers la conclusion recherchée, 0pts sinon.

d) On va avoir un système avec une équation de moins que d'inconnues. Il y aura une infinité de solutions. La matrice de krigeage sera singulière et ne pourra pas être inversée.

3pts si bonne réponse, 1pts si la justification mène vers la conclusion recherchée, 0pts sinon.

Q8.

a) Celui du centre. La variance de krigeage est la plus faible.

2pts patron du centre, 1pts si sans justification, 0 sinon

b) Les poids de la figure du centre sont plus importants dans l'azimut 20. Il y a alors présence d'une anisotropie. La grande portée est dans la direction nord avec une légère inclinaison vers l'est (environ 10-20°), car les poids de la figure du centre ne sont pas symétriques autour de la zone estimée.

5 pts si mentionnée présence d'une anisotropie géométrique avec ag environ vers le nord-est avec bonne justification. -2.5 si non justifié, -2.5 si mauvaise direction, 0 si l'anisotropie n'est pas détectée.

c) Oui, une ellipse orientée dans la direction de la grande continuité.

3pts si ellipse bien orientée, 2 pts si ellipse mal orientée mais bien défini, 2pts si le voisinage est bien défini, mais la forme n'est pas adaptée, 1 pts si utilisation d'un voisinage, mais mal défini, 0 sinon.