
Notes : Vous répondez sur le questionnaire.

Utilisez le verso au besoin et écrivez lisiblement

Fournir le détail des calculs et justifier vos réponses lorsque requis. Ne pas oublier d'indiquer les unités.

Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire (p. 15-18)

Le professeur et les surveillants ne répondent à aucune question durant l'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.

Deux feuilles recto-verso d'aide-mémoire sont permises.

Toute calculatrice permise.

L'examen comprend 8 questions totalisant 100 points et réparties sur 18 pages.

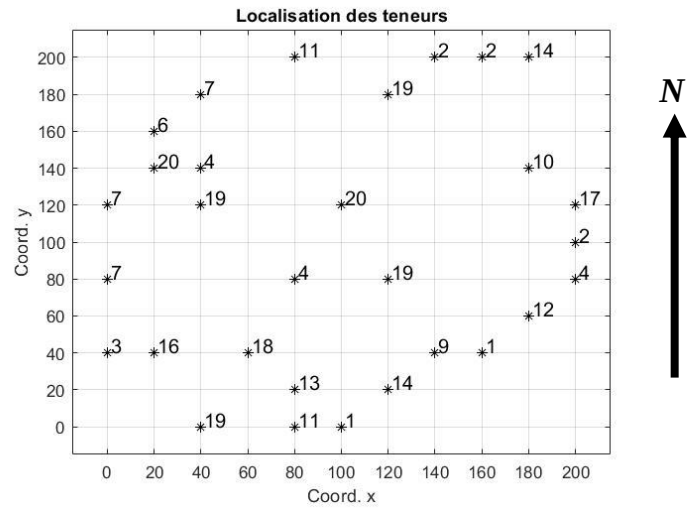
Q1-12, Q2-10, Q3-18, Q4-10, Q5-10, Q6-16, Q7-10, Q8-14.

Nom de l'étudiant : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question 1 (12 points)

8 pts a) Calculez le variogramme expérimental des données suivantes (teneur exprimée en %) dans les directions demandées. (note : Identifiez les paires de points pour ne pas en oublier.)



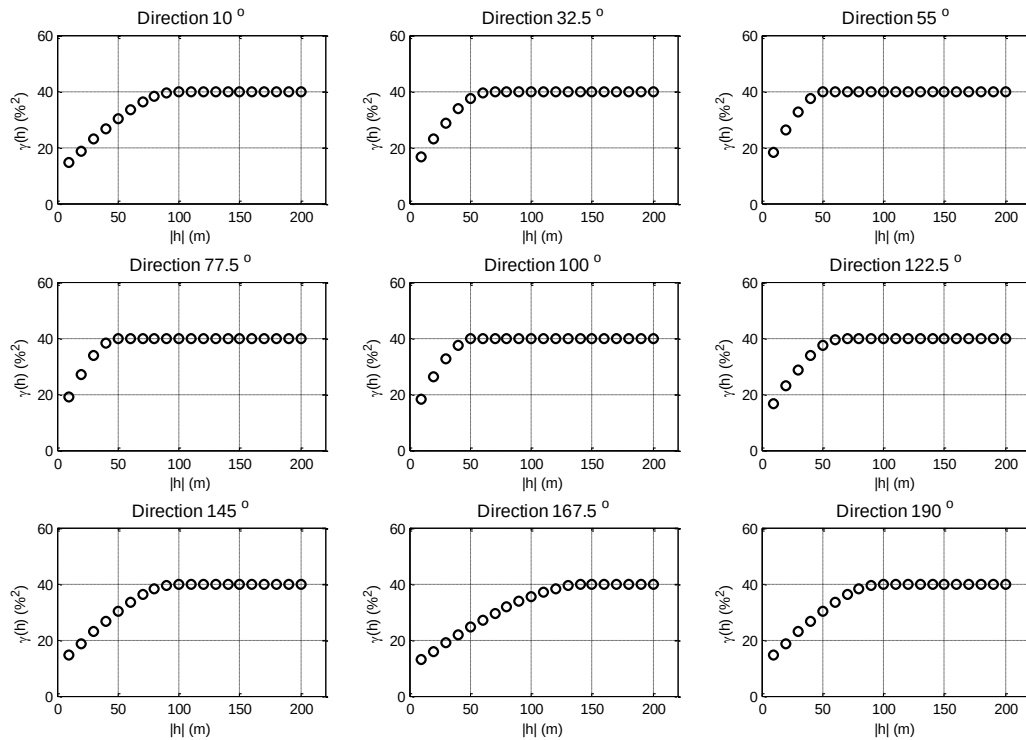
La direction (azimut) 0° pour une distance de 20 m exactement :

La direction (azimut) 90° pour une distance de 20 m exactement :

4 pts b) On effectue le krigeage ordinaire sur une grille régulière de 1m en partant du point (0.5 m, 0.5 m) avec ces données. Le krigeage utilise toutes les données pour kriger chaque point. Le modèle de variogramme retenu est sphérique avec un effet de pépité. On calcule ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées. Ce variogramme expérimental sera-t-il bien ajusté par le modèle utilisé pour réaliser le krigeage? Justifiez.

Question 2 (10 points)

Pour un banc d'une mine de cuivre, l'on calcule les variogrammes expérimentaux des teneurs, exprimées en % Cu, selon différentes directions et avec une tolérance angulaire de 5 degrés.



Ajustez un modèle de variogramme 2D à ces variogrammes expérimentaux.

Question 3 (18 points)

Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 0^0 . Les paramètres du modèle sont $C_0=2$ ppm², $C_1=8$ ppm², $a_0=60$ m, $a_{90}=30$ m.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (0,0). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	-10	-10	3.1
2	-5	10	2.5
3	10	-5	7.1
4	10	5	2.1

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{pmatrix} 10 & A & 1.15 & 0.90 & 1 \\ B & C & 1.99 & 2.44 & 1 \\ 1.15 & 1.99 & 10 & 6.02 & 1 \\ 0.90 & 2.44 & D & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.73 \\ 5.22 \\ 4.04 \\ 4.04 \\ G \end{pmatrix}$$

8 pts a) Que valent les entrées A à G ?

Le système de krigeage est résolu et on obtient les poids suivants : $\lambda_1=0.2164$, $\lambda_2=0.3789$, $\lambda_3=0.2168$ et $\lambda_4=0.1879$. Le multiplicateur de Lagrange est $\mu=-0.2630$.

3pts b) Estimez la teneur au point de coordonnée (0,0) par krigeage ordinaire.

3pts c) Calculez la variance de krigeage ordinaire.

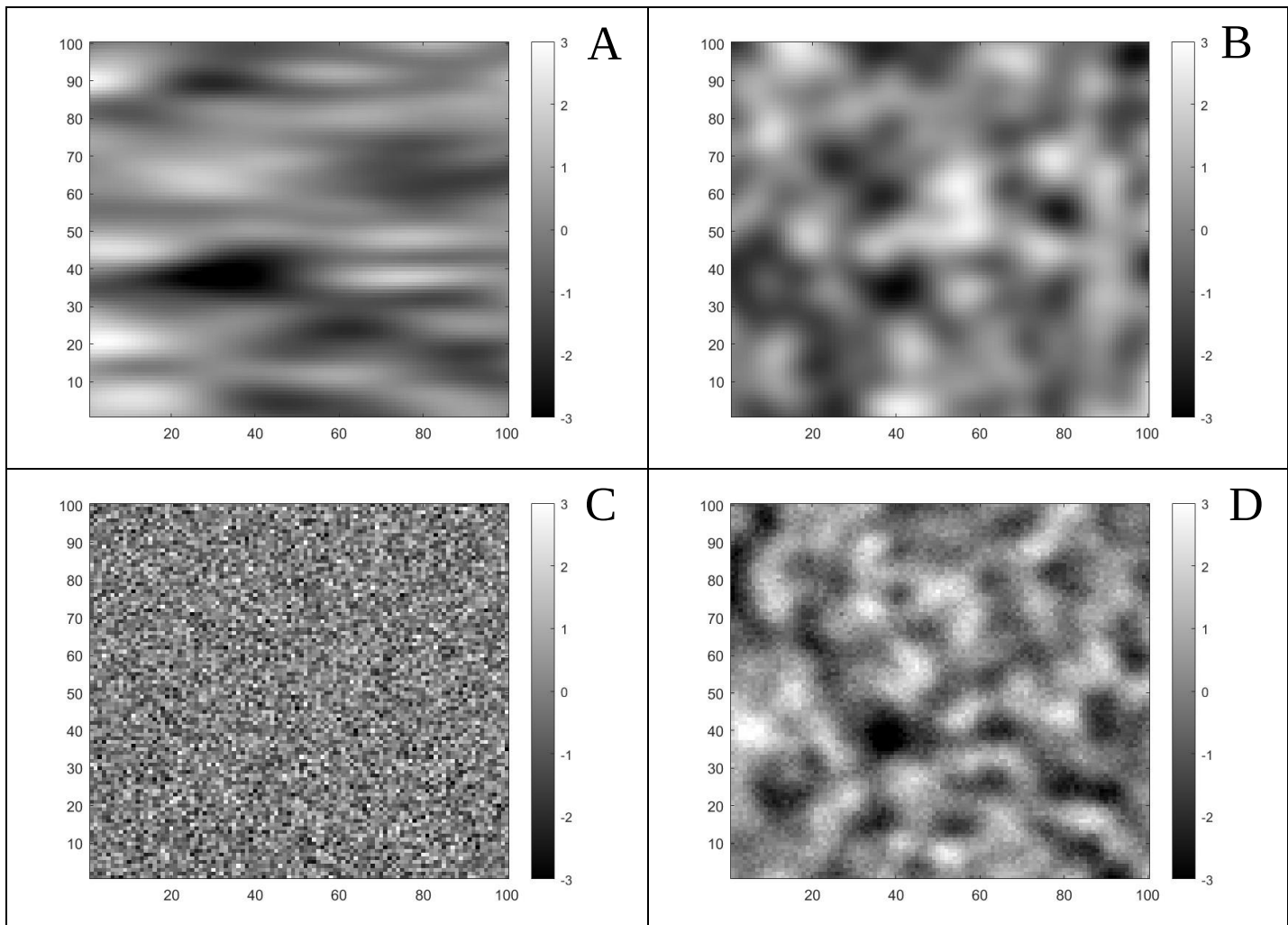
2 pts d) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Comment modifieriez-vous le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information ?

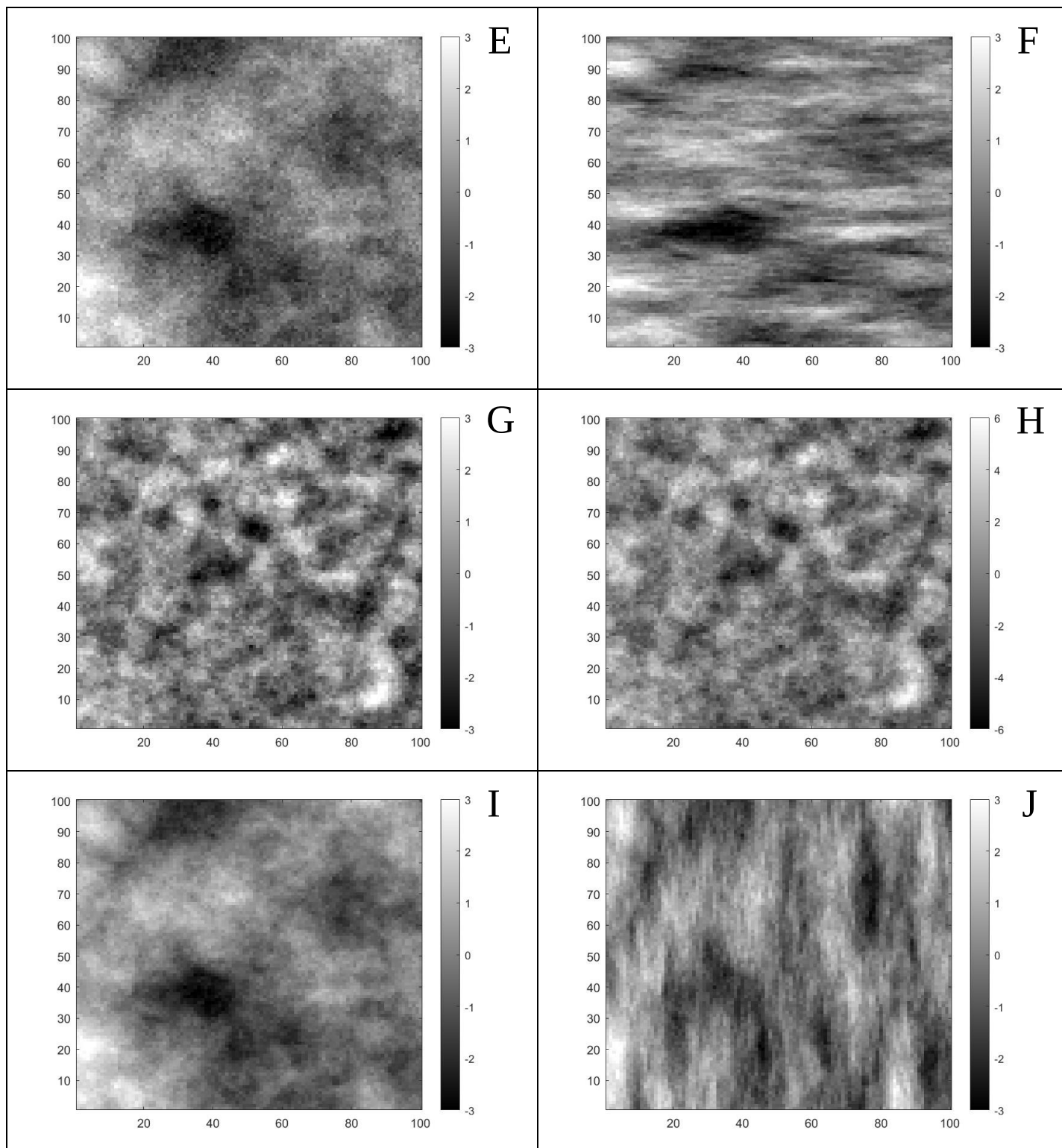
2 pts e) En général, est-il possible qu'un krigeage retourne une teneur estimée négative même si toutes les teneurs mesurées sont (évidemment) positives ? Justifiez.

Question 4 (10 points)

Le tableau suivant présente dix modèles de variogramme suivis de dix figures (des simulations géostatistiques) représentant les corrélations spatiales décrites par les dix modèles. Associez chaque figure à la bonne description (i.e., au bon modèle). Une figure par description.

Modèle	Description	Figure
I	Effet de pépite pur ($C_0=1$)	
II	Effet de pépite ($C_0=0.05$) et modèle sphérique isotrope ($C_1=0.95$, $a=40$)	
III	Effet de pépite ($C_0=0.05$) et modèle gaussien isotrope ($C_1=0.95$, $a_{\text{eff}}=10$)	
IV	Modèle sphérique isotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff}}=10$)	
V	Modèle sphérique isotrope ($C_1=2$, $a_{\text{eff}}=10$)	
VI	Modèle sphérique isotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff}}=40$)	
VII	Modèle sphérique anisotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff},x}=40$, $a_{\text{eff},y}=10$)	
VIII	Modèle sphérique anisotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff},x}=10$, $a_{\text{eff},y}=40$)	
IX	Modèle gaussien isotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff}}=15$)	
X	Modèle gaussien anisotrope ($C_1=1$, $a_{\text{eff},x}=40$, $a_{\text{eff},y}=10$)	





Question 5 (10 points)

Une zone d'un gisement 3D d'or est reconnue à l'aide de 49 forages verticaux de 201 m de longueur chacun. Les forages sont situés sur une grille régulière et sont espacés de 50 m (en x et en y). Les carottes de 3 m analysées en continu tout le long du forage ont permis d'identifier un modèle de variogramme sphérique avec $C_0 = 10 \text{ ppm}^2$, $C_1 = 90 \text{ ppm}^2$ et présentant une anisotropie géométrique avec $a_x = a_y = 100 \text{ m}$ et $a_z = 40 \text{ m}$. On considère le modèle isotrope dans le plan horizontal formé des axes x-y.

Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en or pour l'ensemble de la zone couverte par les 49 forages ?

Question 6 (16 points)

Une cimenterie considère l'utilisation d'une pile de pré-homogénéisation pour réduire la variabilité de la teneur en C_3S du ciment. Son système d'échantillonnage fournit une analyse aux 30 minutes qui représente précisément la teneur de tout le ciment produit durant cette période. La compagnie désire que les teneurs observées aux 30 min soient les plus constantes possibles sur la durée de l'exploitation de la carrière. À la carrière, le variogramme 2D des teneurs de C_3S (composites sur l'épaisseur totale du banc (5m)) est sphérique avec anisotropie géométrique et $C_0=5\%^2$, $C_1=35\%^2$, $a_x=100m$, $a_y=40m$. Les dimensions de la carrière sont considérées grandes par rapport aux portées observées. **La compagnie considère qu'une variance des teneurs aux 30 min de $10\%^2$ en C_3S (sur la durée de vie de la carrière) est le maximum acceptable.**

La compagnie envisage choisir entre 2 piles différentes pour lesquelles elle reçoit des soumissions :

Pile	Tonnage de la pile (dimensions à la carrière en x, y, z)	Coût
Petite	13.5 Kt (20m x 50m x 5m)	10M\$
Moyenne	54 Kt (40m x 100m x 5m)	18M\$

8 pts a) *Tenant compte de ces informations, vers quelle pile votre choix se porterait-il? Faites les calculs requis.*

2 pts b) *Est-ce que l'orientation des blocs à la carrière est d'une quelconque importance dans ce problème? Justifiez.*

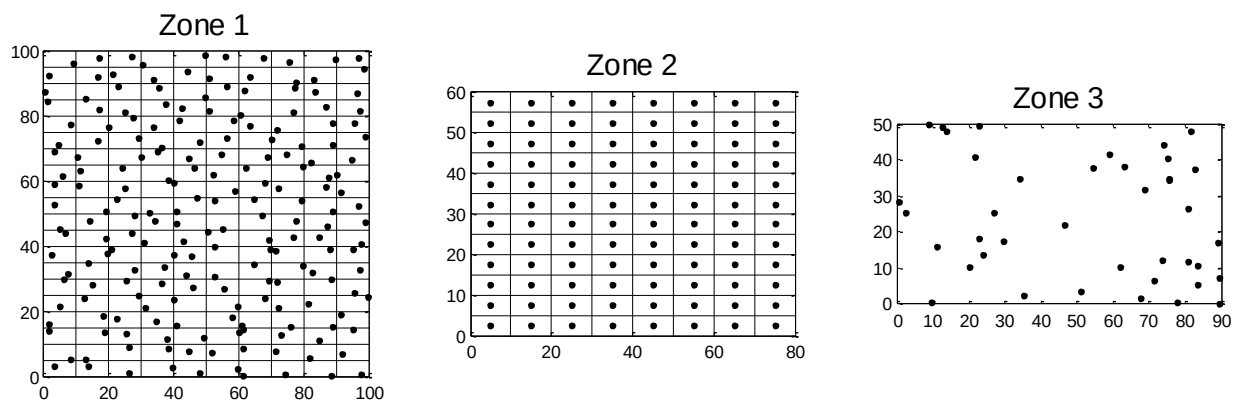
3 pts c) Quel variogramme expérimental obtiendrait-on sur les analyses prélevées aux 30 minutes en supposant que l'on calcule le variogramme uniquement avec les données provenant d'une seule et même pile et que le volume traité durant 30 minutes représente une tranche verticale uniforme dans la pile, et qu'il n'y a aucun effet de bout de pile.

3 pts d) Si l'on calcule le variogramme cette fois en utilisant les données sur une très longue période (et donc provenant d'un grand nombre de piles différentes), vers quel palier devrait converger le variogramme expérimental ?

Question 7 (10 points)

La figure suivante montre trois zones distinctes d'un même niveau de 5m d'épaisseur dans un gisement de Cu (le variogramme est calculé à partir de la teneur moyenne des forages sur toute l'épaisseur du niveau). Dans chaque zone, on a un patron d'échantillonnage distinct et un variogramme distinct. L'origine de chaque zone a été reportée en (0,0) pour faciliter les calculs. Les teneurs moyennes estimées des zones et les modèles de variogramme (2D) sont donnés dans le tableau ci-bas. Notez que la teneur moyenne de la 3^e zone a été estimée par un krigeage global pour l'ensemble de la zone. La variance de krigeage obtenue pour la 3^e zone est 0.09% .

Zone	Teneur moyenne	Modèle
Zone 1	2.1%	Sphérique isotrope, $a=10\text{m}$, $C_0=2\%^2$, $C_1=8\%^2$
Zone 2	1.8%	Sphérique anisotrope, $a_x=10\text{m}$, $a_y=20\text{m}$, $C_0=1\%^2$, $C_1=9\%^2$
Zone 3	2%	Exponentiel isotrope, $a_{\text{effectif}}=30\text{m}$, $C_0=1\%^2$, $C_1=10\%^2$



Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne de l'ensemble des trois zones?

Question 7 (suite)

Question 8 (14 points)

Deux firmes de génies conseils dispose de valeurs estimées de teneurs de zinc. La première firme propose d'opérer la mine avec des blocs de 40 m x10 m x10 m tandis que la seconde firme propose des blocs de dimension 20 m x20 m x10 m. La méthode par laquelle ces estimées ont été obtenus n'est pas spécifiée par les deux firmes. Cependant, vous disposez des statistiques élémentaires calculées sur ces valeurs estimées :

Statistique	Valeurs estimées pour les blocs	
	Firme 1	Firme 2
Moyenne	1.9%	1.6%
Variance	5% ²	4.7% ²
Minimum	0%	0%
Maximum	9.5%	8.7%

Le gisement est grand par rapport à la portée du variogramme et homogène statistiquement, les données ponctuelles montrent un variogramme sphérique (3D) isotrope avec $C_0=2\text{ \%}^2$, $C_1=6\text{ \%}^2$ et $a=100\text{ m}$.

6 pts a) Calculez la variance de bloc théorique associée aux dimensions de bloc des deux firmes.

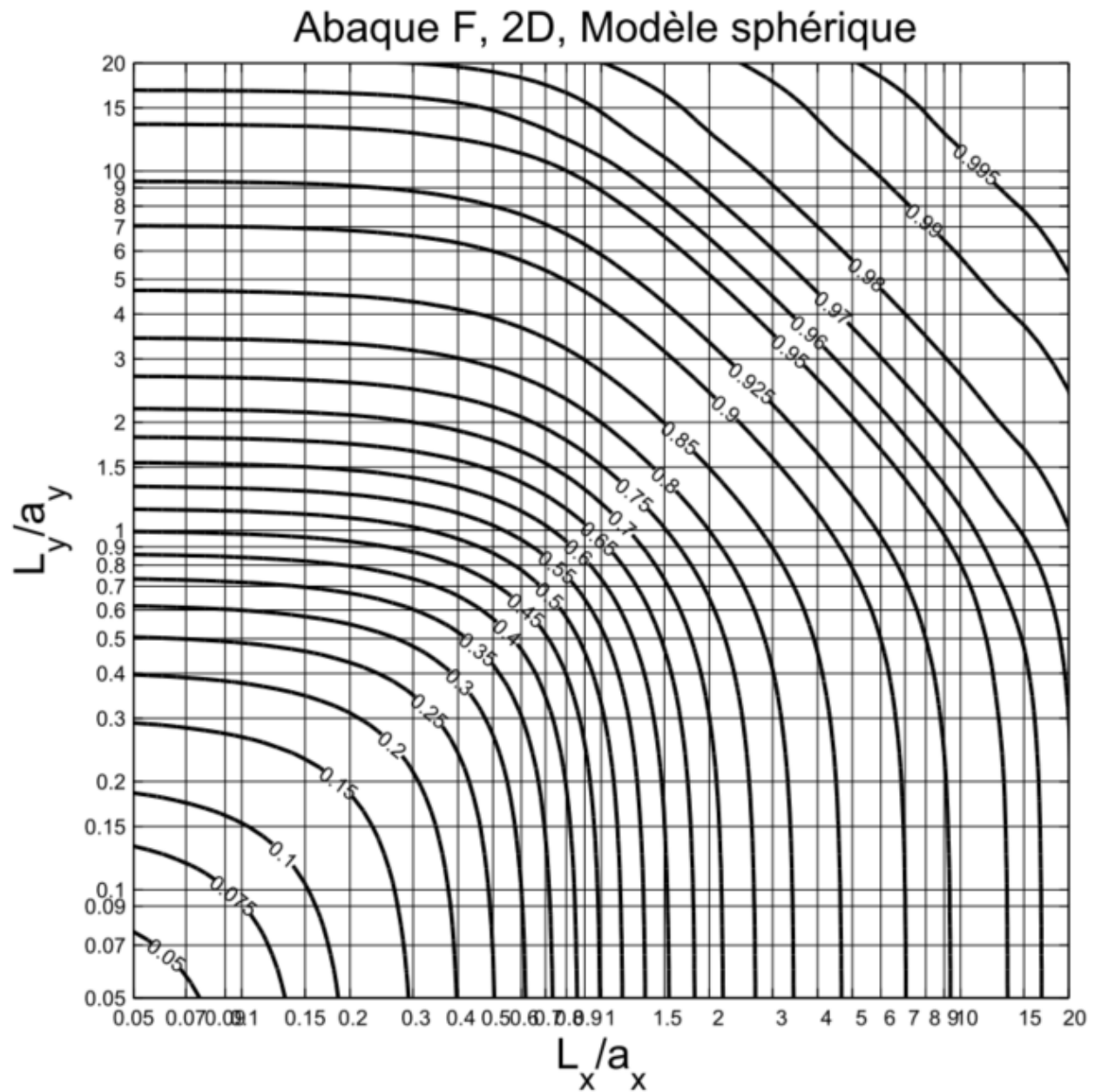
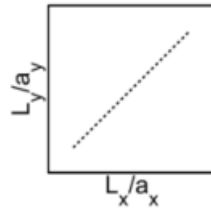
4 pts b) Pourquoi pouvons-nous affirmer que les valeurs estimées d'une des deux firmes ont nécessairement un biais conditionnel? Justifiez grâce à la réponse en a.

2 pts c) On sélectionne les blocs à une teneur de coupure 1.1% en se basant sur les teneurs estimées par la première firme. Est-ce que la teneur réelle du minerai sera probablement supérieure, probablement inférieure ou similaire à la teneur moyenne estimée du minerai ? Justifiez.

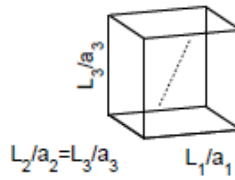
2 pts d) Une erreur dans la base de données minière de la firme 1 fait que deux données différentes se trouvent à avoir exactement les mêmes coordonnées. Que se passera-t-il lors du krigeage si le voisinage de recherche inclut ces deux données? (Aide : ce n'est pas dans les notes de cours)

Abaques

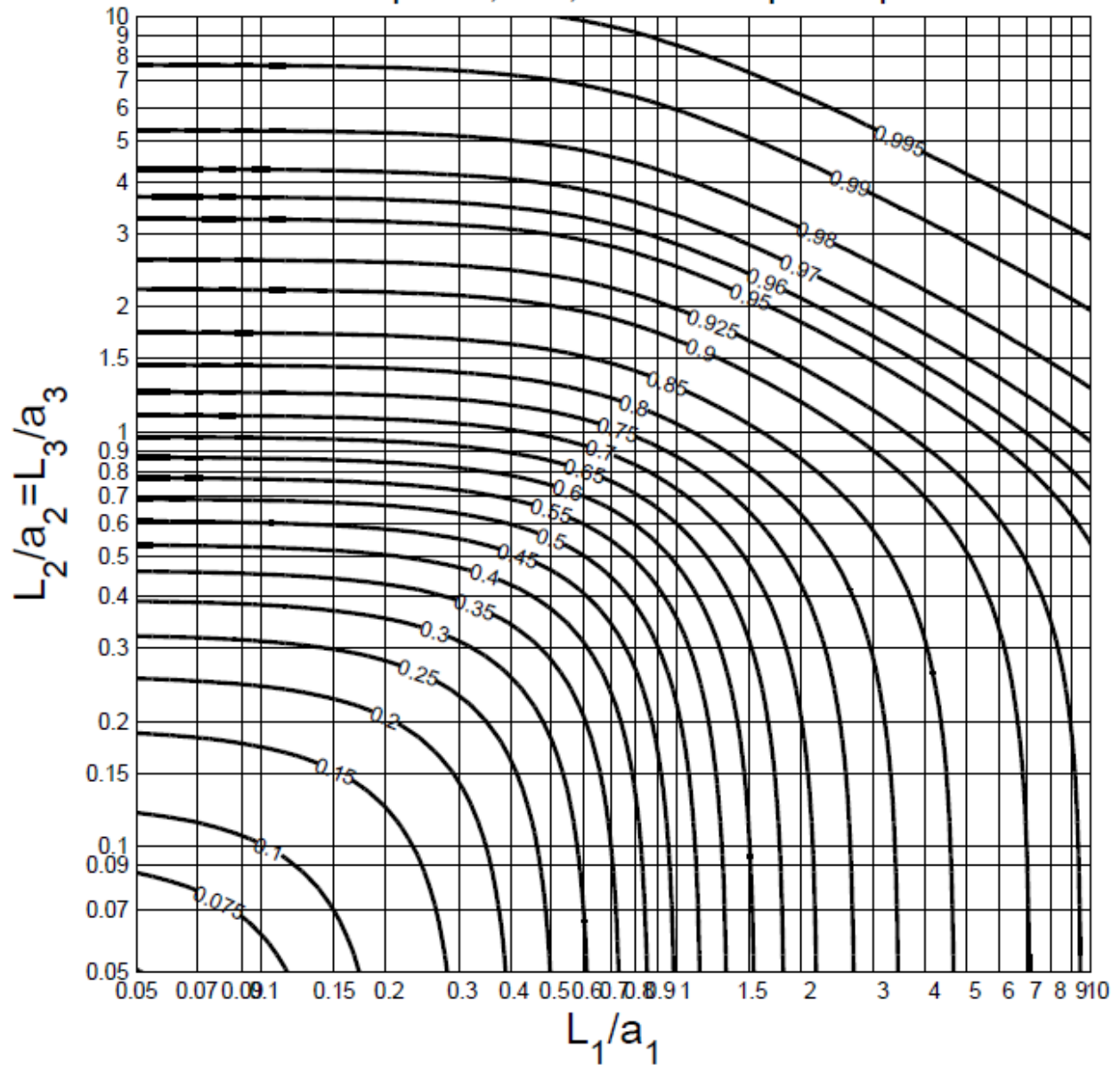
1- Variance de dispersion d'un point dans un rectangle, modèle sphérique



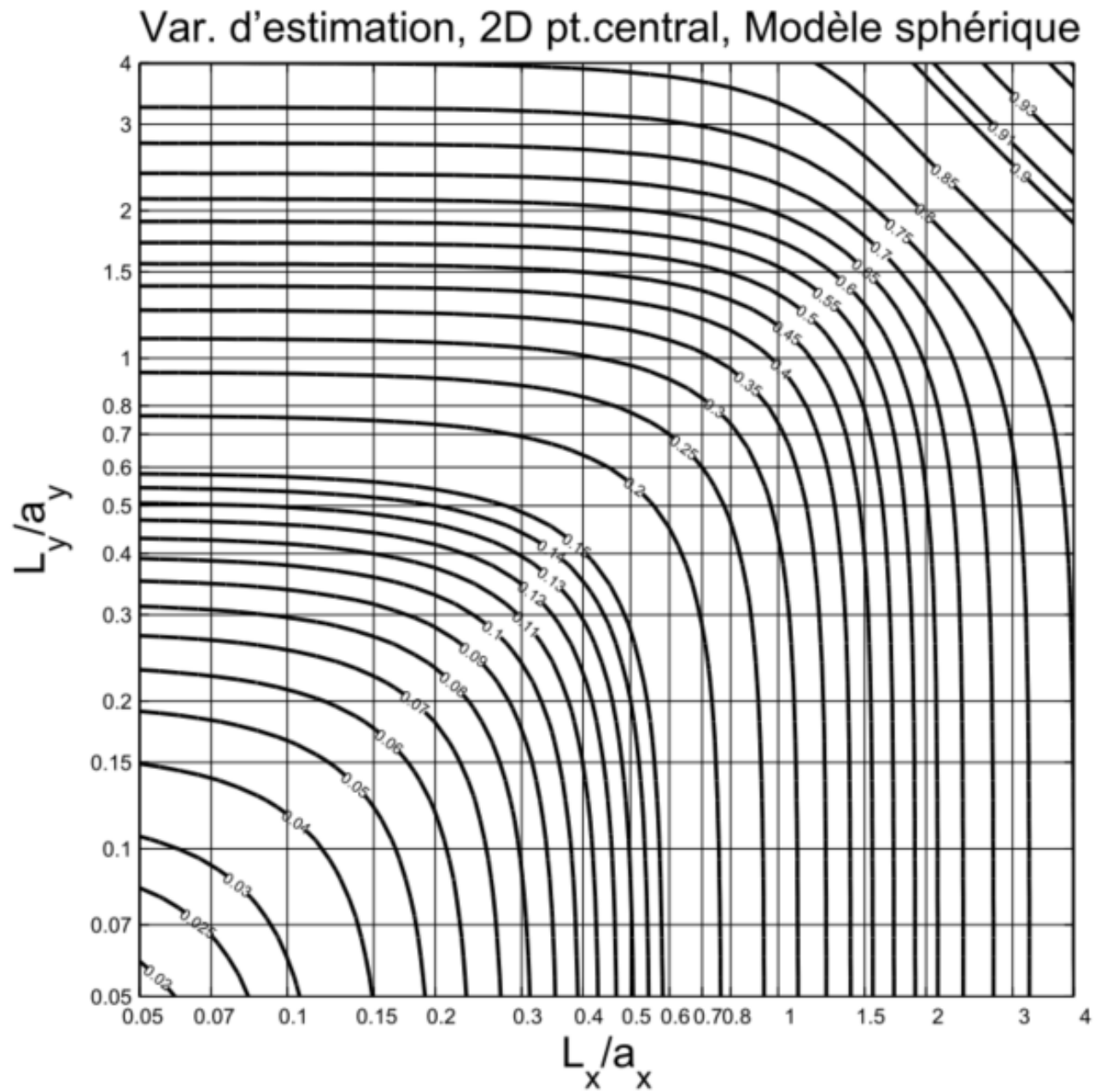
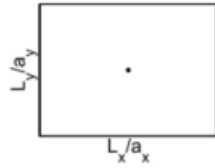
2- Variance de dispersion d'un point dans un bloc à section carrée, modèle sphérique



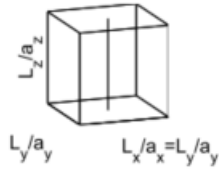
Abaque F, 3D, Modèle sphérique



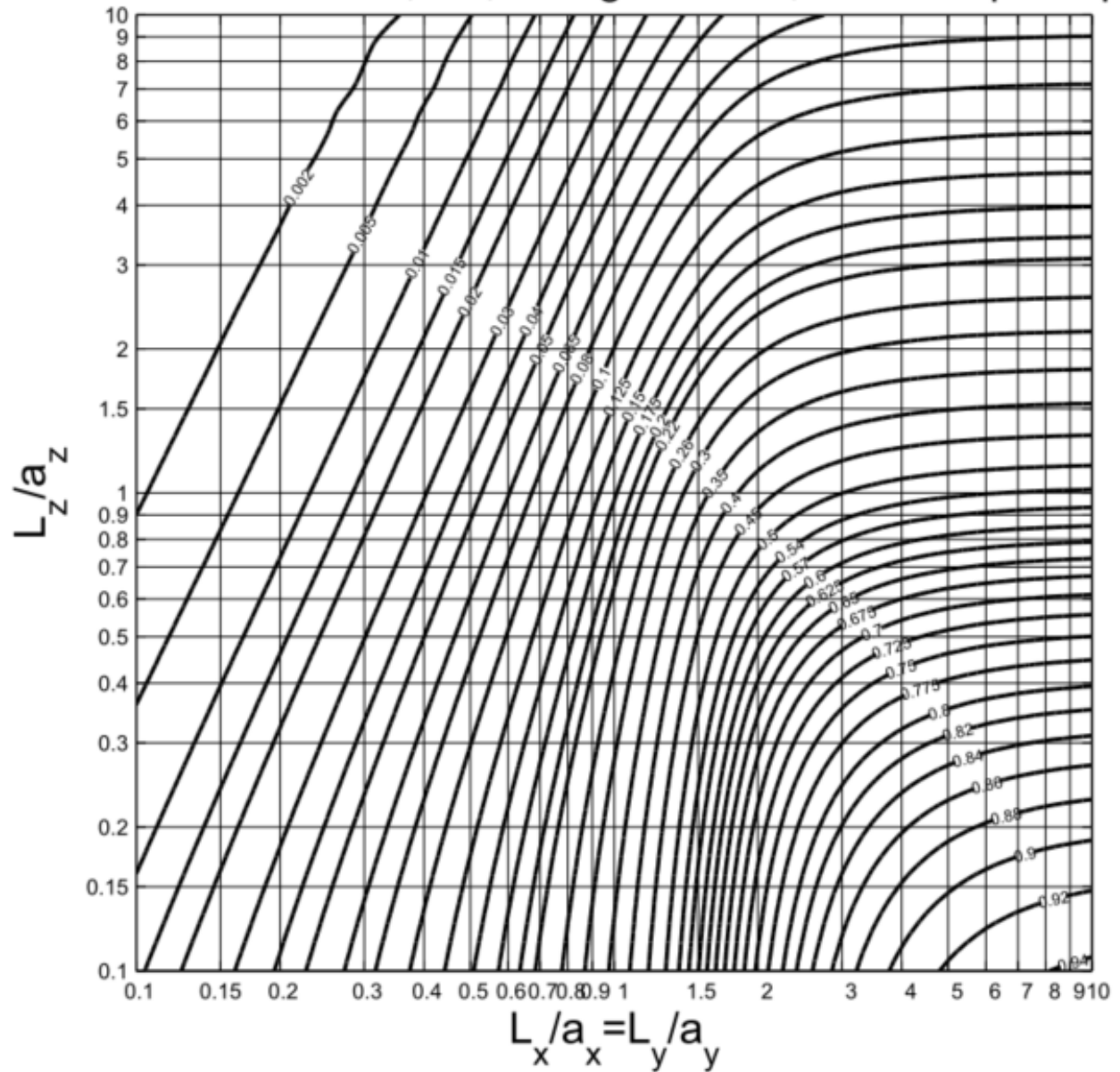
3- Variance d'estimation d'un rectangle par son point central, modèle sphérique



4- Variance d'estimation d'un bloc à section carrée par le forage central, modèle sphérique



Var. d'estimation, 3D, Forage central, Modèle sphérique



Q1 a)

$$\text{gamma}(20,0\text{deg}) = 1/(2*5) * [(6-20)^2 + (4-19)^2 + (17-2)^2 + (2-4)^2 + (13-11)^2] = 65.4 \%^2$$

$$\text{gamma}(20,90\text{deg}) = 1/(2*6) * [(2-2)^2 + (2-14)^2 + (20-4)^2 + (3-16)^2 + (9-1)^2 + (11-1)^2] = 61.08 \%^2$$

4pts par direction, -0.5pts par couple erroné, -0.5pts erreur d'unités, -2pts mauvaise direction mais bonne identification des couples, -2pts mauvaise distance, mais bonne identification des couples, -2pts si erreur dans l'équation, -0.5pts erreur de calcul.

b) Non il ne sera pas bien ajusté pour 2 raisons. Premièrement l'effet de pépite sera complètement filtré puisque les valeurs krigées sont continues (on ne krige qu'en des points sans donnée). Deuxièmement, on a la propriété de lissage du krigeage qui nous dit que la variance des valeurs krigées sera inférieure à la variance des données. Donc le plateau sera inférieur (ceci demeure vrai même s'il n'y a pas d'effet de pépite). Une ou l'autre de ces raisons est suffisant.

2pts : non, 2pts : justification

Q2) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La portée principale est selon la direction 167.5 degrés et la portée minimale selon 77.5. Les portées sont $a_g=150$ m et $a_p=50$ m. $C_0=12\ \%^2$ et $C_1=28\ \%^2$.

2pts pour chaque composante ($C_1, C_0, a_g, a_p, \text{modèle}$), -1pts si manque les directions des portées, -1pts par mauvaise portée

Q3)

a) $A=B, C=10, D=6.02, E=1, F=0, G=1$

Pour trouver A : distance 1-2 = $\sqrt{((-10-5)^2 + (-10-10)^2)} = 20.62$ m

azimut 1-2 = $\text{atan}(20/5)=75.96\text{deg}$

$\theta = 90-75.96 = 14.04\text{deg}$

$a_{\theta} = 60*30 / [30^2 \cos(14)^2 + 60^2 \sin(14)^2]^{0.5} = 55.34$ m

$C(h_{12}) = 8*[1-(1.5(20.62/55.34)-0.5(20.62/55.34)^3)] = 3.73\text{ ppm}^2$

1pts réponse B=A, 1pts C=30, 1pts D=1, 1pts E=0, 1pts F=1, 1pts G=8.29, 2pts pour A=3.73.

-1pts erreur d'angle, -1pts erreur distance, -1pts erreur, -1pts petite erreur formule, -2 erreur de calcul majeur pour A, -0.5pts erreur calculatrice.

b) $Z_0 = 0.2164*3.1 + 0.3789*2.5 + 0.2168*7.1 + 0.1879*2.1 = 3.5521$

3pts réponse, -1pts erreur formule, -0.5pts erreur calculatrice.

c) $\text{Var}(e) = 10 - (0.2164*3.73 + 0.3789*5.22 + 0.2168*4.04 + 0.1879*4.04) - (-0.2630) = 5.84$

3pts réponse, -1pts erreur formule, -0.5pts erreur calculatrice.

d) Il suffit d'ajouter 3 ppm^2 sur la diagonale à la 2^e position donc 13 ppm^2 au lieu de 10 ppm^2 .

2pts si mentionné que C devient 13, -1pts si mentionné que ça affecte toutes la covariance avec le point 2, 0 sinon.

e) Oui, les poids peuvent être négatif et donc la teneur aussi.

1pts oui, 1pts justification

Q4) 1pts pour chaque modèle identifié

I-C, II-E, III-D, IV-G, V-H, VI-I, VII-F, VIII-J, IX-B, X-A

Q5)

On a 49 parallélépipèdes de 201m de long x 50m x 50m . On peut utiliser l'abaque 3D de la variance d'estimation. On a $201/3=67$ carottes dans chaque forage. Donc pour un bloc : $\text{Var}(e) = 10/67 + 90 \cdot E(50/100, 201/40) = 10/67 + 90 \cdot 0.01 = 1.049$.

Pour l'ensemble des 49 forages, on obtient : $1.049/49 = 0.021 \text{ ppm}^2$

-1 pts erreur d'abaque, -0.5 erreur rapport, -2 erreur formule $\text{var}(e1)=c0/n+C1E$, -2 erreur formule $\text{var}(e)=\text{var}(e1)/49$, -2 oublie du $n=201/3$,

Q6)

a) pour la petite pile : $C_1(1-F(20/100,50/40)) = 35 \cdot (1-0.55) = 15.75\%^2$

pour la grande pile $C_1(1-F(40/100,100/40)) = 35 \cdot (1-0.77) = 8.05\%^2$

Par pile, 4pts bonne réponse, -1 pts erreur rapport, -0.5 erreur de réécriture des données, -0.5pts erreur lecture abaque, -1 erreur de formule, -3pts si formule complètement erronée.

-2pts si la comparaison n'est pas réalisée et donne un scénario impossible. -1 pts si la comparaison n'est pas réalisée, mais le scénario est possible.

b) oui car l'on a une anisotropie géométrique. Ainsi, pour la grande pile, si le bloc est orienté dans l'autre sens, on trouve :

$C_1(1-F(100/100,40/40)) = 35 \cdot (1-0.66) = 11.9\%^2$ et l'on ne rencontre pas l'objectif de la cimenterie.

0pts si répondu non, 1pts si répondu oui, 2pts si bonne justification (-1pts si l'anisotropie géométrique n'est pas mentionné) . La justification par calcul n'était pas obligatoire.

c) Comme il n'y aurait pas de variation tant que l'on est dans la pile, le variogramme serait 0 pour tout delta t.

0 pts mauvaise réponse, 2pts si observé que les teneurs sont les mêmes, 3pts si répondu $\gamma=0$.

d) La variance que l'on verra sur une très longue période sera simplement la variance des blocs de la taille de la pile, soit $8.05\%^2$

0pts si mauvaise réponse, 2pts si mentionner que le palier sera celui des piles, 3pts si mentionner que ce sera la réponse fournie en 2a.

Q7)

Zone	nombre d'extensions élémentaires	variance extension	pour une	variance l'ensemble	pour	surface de la zone

	(points)			
1	200	$2+8 \cdot F(10/10, 5/10) = 2+8 \cdot 0.55 = 6.4$	$6.4/200 = 0.032$	10000
2	96	$1+9 \cdot E(10/10, 5/20) = 1+9 \cdot 0.27 = 3.43$	$3.43/96 = 0.0357$	4800
3	-	-	0.09	4500

Globalement : $(10000^2 \cdot 0.032 + 4800^2 \cdot 0.0357 + 4500^2 \cdot 0.09) / 19300^2 = 0.0156 \%^2$

3pts var(e1), 3pts var(e2), 1pts var(e3), 3pts var(e_{total})

Pour var(e1) et var (e2) :-0.5pts mauvais abaque, -0.5 erreur rapport (L/a), -0.5pts erreur transcription des données, -0.5pts si mauvais comptage du nombre de données, -0.5pts si oubli de l'effet de pépité, -0.5 pts erreur formule, -0.5 mauvaise lecture des paramètres

Pour var(e3), bien identifier qu'il s'agit de la variance de krigeage

Pour var(etotal), -3 -3pts si mauvaise formule, -2 si mauvais volumes, -0.5pts si erreur de calcul malgré le suivi des erreurs.

Q8)

a) Firme 1) $C1(1-F(40/100, 10/100)) = 6 \cdot (1-0.225) = 4.65\%^2$

Firme 2) $C1(1-F(10/100, 20/100)) = 6 \cdot (1-0.175) = 4.95\%^2$

3pts par calcul de variance de bloc. (1pts pour les ratios. 1pts lecture abaque. 1pts calcul) -1 erreur formule, -1 erreur abaque, -1 effet de pépité inclus, -2 si mauvais raisonnement.

b) La variance de bloc de la firme 1 est supérieur à la variance de bloc théorique du bloc de la firme 1.

4pts bonne réponse, 2pts justification incomplète, 0 sinon.

c) Probablement inférieure, car il y a surestimation des blocs.
1pts réponse, 1pts justification

d) La matrice inverse du krigeage n'est pas inversible
2pts réponse, 1 si justification incomplète, 0 sinon