

Notes : Vous répondez sur le questionnaire.

Utilisez le verso au besoin et écrivez lisiblement

Fournir le détail des calculs et justifier vos réponses lorsque requis. Ne pas oublier d'indiquer les unités.

Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire (p. 15-17)

Le professeur et les surveillants ne répondent à aucune question durant l'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.

Deux feuilles recto-verso d'aide-mémoire sont permises.

Toute calculatrice permise.

L'examen comprend 8 questions totalisant 100 points et réparties sur 17 pages.

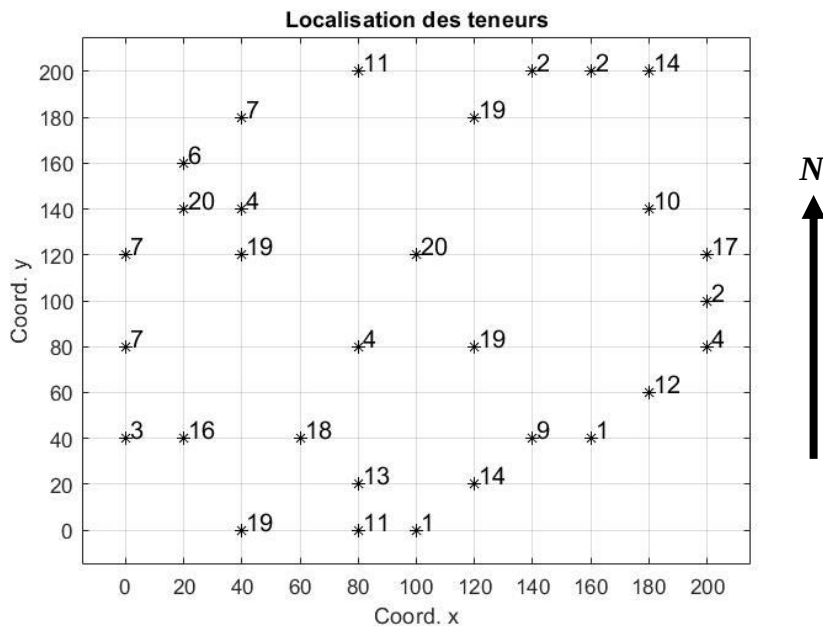
Dans l'ordre : 1-12, 2-16, 3-15, 4-10, 5-15, 6-12, 7-10, 8-10 pts

Nom de l'étudiant : _____

Signature : _____ Matricule : _____

Question 1 (12 points)

- 8 pts a) Calculez le variogramme expérimental des données suivantes (teneur exprimée en %) dans la direction (azimut) 90° pour une distance de 20 m exactement et puis dans la direction (azimut) 45° pour une distance de $(20^2 + 20^2)^{1/2}$ m exactement.



Question 1 (suite)

- 4 pts b) On effectue le krigeage ordinaire sur une grille régulière de 1m en partant du point (0.5 m, 0.5 m) avec ces données. Le krigeage utilise toutes les données pour kriger chaque point. Le modèle de variogramme retenu est sphérique avec un effet de pépité. On calcule ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées. Ce variogramme expérimental sera-t-il bien ajusté par le modèle utilisé pour réaliser le krigeage? Justifiez

Question 2 (16 points)

Une cimenterie considère l'utilisation d'une pile de pré-homogénéisation pour réduire la variabilité de la teneur en C3S du ciment. Son système d'échantillonnage fournit une analyse aux 30 minutes qui représente précisément la teneur de tout le ciment produit durant cette période. La compagnie désire que les teneurs observées aux 30 min soient les plus constantes possibles sur la durée de l'exploitation de la carrière. À la carrière, le variogramme 2D des teneurs de C3S (composites sur l'épaisseur totale du banc (5m)) est sphérique avec anisotropie géométrique et $C_0=10\%^2$, $C_1=35\%^2$, $a_x=100\text{m}$, $a_y=40\text{m}$. Les dimensions de la carrière sont considérées grandes par rapport aux portées observées.

La compagnie envisage choisir entre 2 piles différentes pour lesquelles elle reçoit des soumissions :

Pile	Tonnage de la pile (dimensions à la carrière en x, y, z)	Coût
Petite	13.5 Kt (20m x 50m x 5m)	10M\$
Moyenne	54 Kt (40m x 100m x 5m)	18M\$

La compagnie considère qu'une variance des teneurs aux 30 min de $10\%^2$ en C3S (sur la durée de vie de la carrière) est le maximum acceptable.

8 pts a) *Tenant compte de ces informations, vers quelle pile votre choix se porterait-il? Faites les calculs requis.*

Question 2 (suite)

4 pts b) *Est-ce que l'orientation des blocs à la carrière est d'une quelconque importance dans ce problème? Justifiez.*

2 pts c) *Quel variogramme expérimental obtiendrait-on sur les analyses prélevées aux 30 min en supposant que l'on calcule le variogramme uniquement avec les données provenant d'une seule et même pile et que le volume traité durant 30 min représente une tranche verticale uniforme dans la pile, et qu'il n'y a aucun effet de bout de pile ?*

2 pts d) *Si l'on calcule le variogramme cette fois en utilisant les données sur une très longue période (et donc provenant d'un grand nombre de piles différentes), vers quel palier devrait converger le variogramme expérimental ?*

Question 3 (15 points)

Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 30° . Les paramètres du modèle sont $C_0=10$ ppm², $C_1=20$ ppm², $a_{30}=50$ m, $a_{120}=25$ m.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (100,100). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	80	90	10
2	95	105	4
3	103	104	7
4	107	92	3

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} 30 & A & 2.43 & 0.09 & 1 \\ B & C & 11.17 & 2.68 & 1 \\ 2.43 & 11.17 & 30 & 8.29 & 1 \\ 0.09 & 2.68 & G & 30 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_1, Z_0) \\ \text{Cov}(Z_2, Z_0) \\ \text{Cov}(Z_3, Z_0) \\ \text{Cov}(Z_4, Z_0) \\ F \end{bmatrix}$$

9 pts a) Que valent les entrées A à G ?

Question 3 (suite)

2 pts b) Quel lien y a-t-il entre les valeurs krigées obtenues en un point quelconque en utilisant, d'une part, le modèle de variogramme de l'énoncé et, d'autre part, un modèle sphérique ayant les mêmes portées suivant les mêmes directions, mais avec $C_0=12 \text{ ppm}^2$ et $C_1=24 \text{ ppm}^2$?

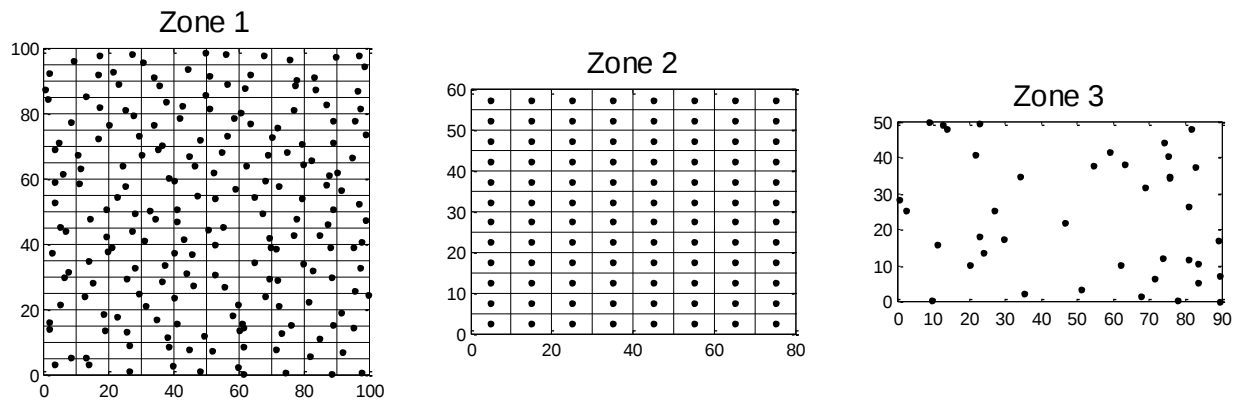
2 pts c) Quel lien y a-t-il entre les variances de krigeage obtenues en un point quelconque en utilisant, d'une part, le modèle de variogramme de l'énoncé et, d'autre part, un modèle sphérique ayant les mêmes portées suivant les mêmes directions, mais avec $C_0=12 \text{ ppm}^2$ et $C_1=24 \text{ ppm}^2$?

2 pts d) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Comment modifieriez-vous le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information ?

Question 4 (10 points)

La figure suivante montre trois zones distinctes d'un même niveau de 5m d'épaisseur dans un gisement de Cu (le variogramme est calculé à partir de la teneur moyenne des forages sur toute l'épaisseur du niveau). Dans chaque zone, on a un patron d'échantillonnage distinct et un variogramme distinct. L'origine de chaque zone a été reportée en (0,0) pour faciliter les calculs. Les teneurs moyennes estimées des zones et les modèles de variogramme (2D) sont donnés dans le tableau suivant :

Zone	Teneur moyenne	Modèle
Zone 1	2.1%	Sphérique isotrope, $a=20m$, $C_0=5\%^2$, $C_1=20\%^2$
Zone 2	1.8%	Sphérique anisotrope, $a_x=20m$, $a_y=10m$, $C_0=7\%^2$, $C_1=12\%^2$
Zone 3	2%	Exponentiel isotrope, $a_{\text{effectif}}=60m$, $C_0=1\%^2$, $C_1=10\%^2$



La teneur moyenne de la 3^e zone a été estimée par un krigeage global pour l'ensemble de la zone. La variance de krigeage obtenue pour la 3^e zone est $0.13 \%^2$.

Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne de l'ensemble des trois zones?

Question 4 (suite)

Question 5 (15 points)

Pour les questions b) à e) la réponse seule ne vaut aucun point, même si elle est bonne. La justification qui l'accompagne est essentielle. 3 pts par sous-question.

a) Une erreur dans une base de données minière fait que deux données différentes se trouvent à avoir exactement les mêmes coordonnées. Que se passera-t-il lors du krigeage si le voisinage de recherche inclut ces deux données? (Aide : ce n'est pas dans les notes de cours)

b) Est-il possible qu'un krigeage retourne une teneur estimée négative même si toutes les teneurs mesurées sont (évidemment) positives ? Justifiez.

c) Est-il possible que le krigeage retourne une teneur estimée supérieure à la plus grande teneur observée dans les données? Justifiez.

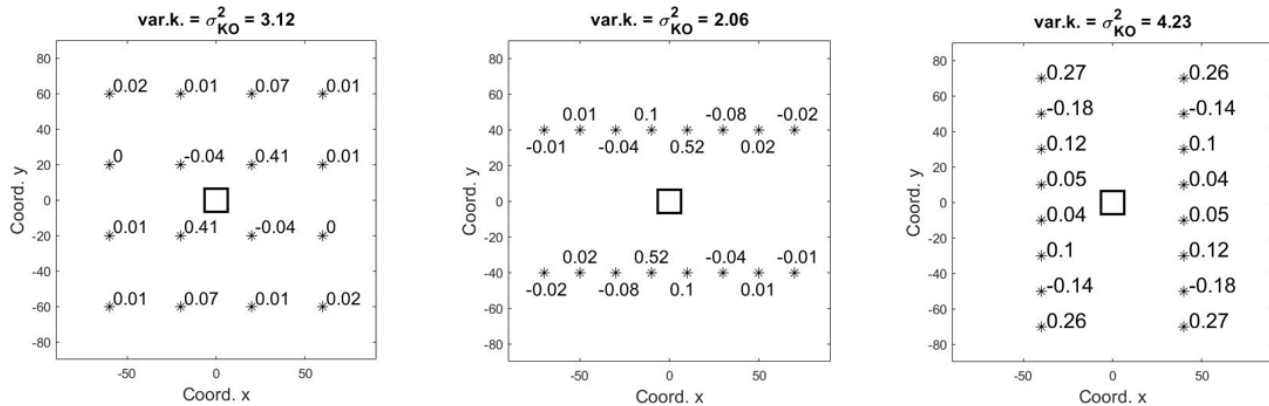
Question 5 (suite)

d) Commentez : on ne peut calculer la variance d'estimation que si l'estimation a été obtenue par krigeage (ordinaire ou simple).

e) Commentez : le choix du voisinage utilisé pour le krigeage peut être davantage important que le choix du modèle de variogramme pour assurer la qualité des estimations du krigeage.

Question 6 (12 points)

Trois patrons d'échantillonnage différents sont utilisés pour estimer une même zone centrale d'un gisement (le carré noir). Les patrons d'échantillonnage sont représentés par les astérisques et les poids de krigeage sont indiqués à côté de chaque donnée. De plus, la variance de krigeage est fournie pour chaque patron dans le titre de chaque figure.



4 pts a) À partir des résultats des trois patrons d'échantillonnage, que peut-on dire sur la continuité spatiale de ce gisement ? Justifiez.

2 pts b) Quel patron d'échantillonnage recommanderiez-vous (gauche, milieu ou droite) ? Justifiez.

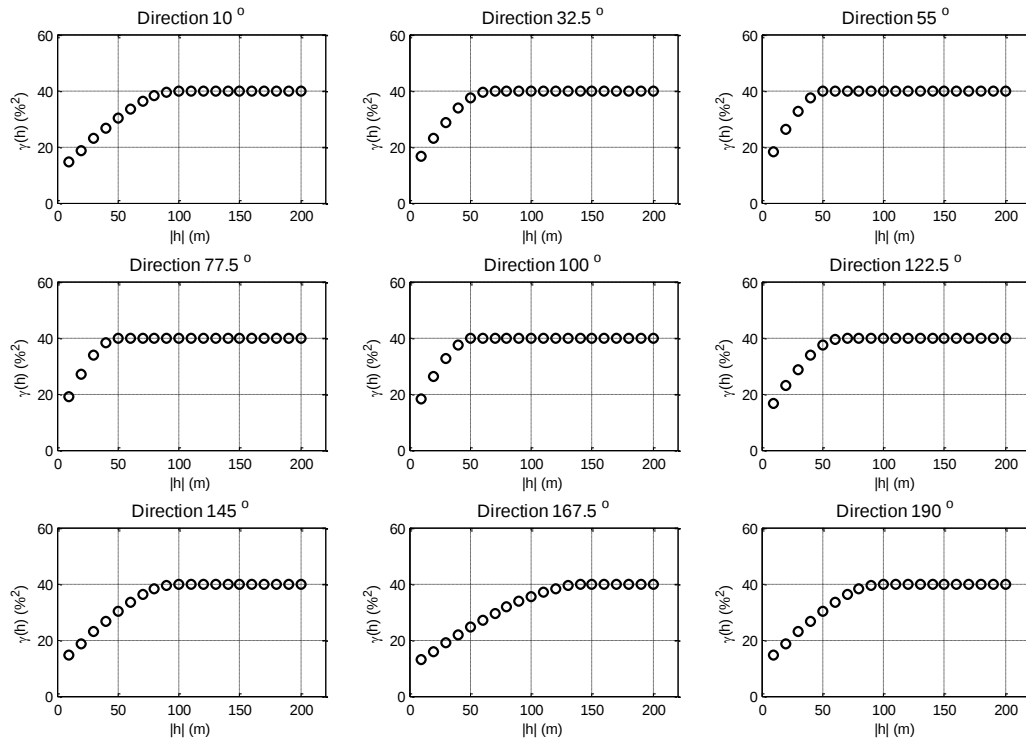
Question 6 (suite)

3 pts c) *En fonction du patron d'échantillonnage choisi en b), recommanderiez-vous l'utilisation d'un voisinage pour le krigeage et si oui, quelle forme de voisinage utiliseriez-vous ? Justifiez.*

3 pts d) *Quel outil statistique pourriez-vous utiliser pour tenter d'identifier un modèle de variogramme et sélectionner la meilleure stratégie de recherche? Mentionnez les principaux paramètres étudiés par votre outil statistique.*

Question 7 (10 points)

Pour un banc d'une mine de cuivre, l'on calcule les variogrammes expérimentaux des teneurs, exprimées en % Cu, selon différentes directions et avec une tolérance angulaire de 5 degrés.



Ajustez un seul modèle de variogramme 2D à ces variogrammes expérimentaux.

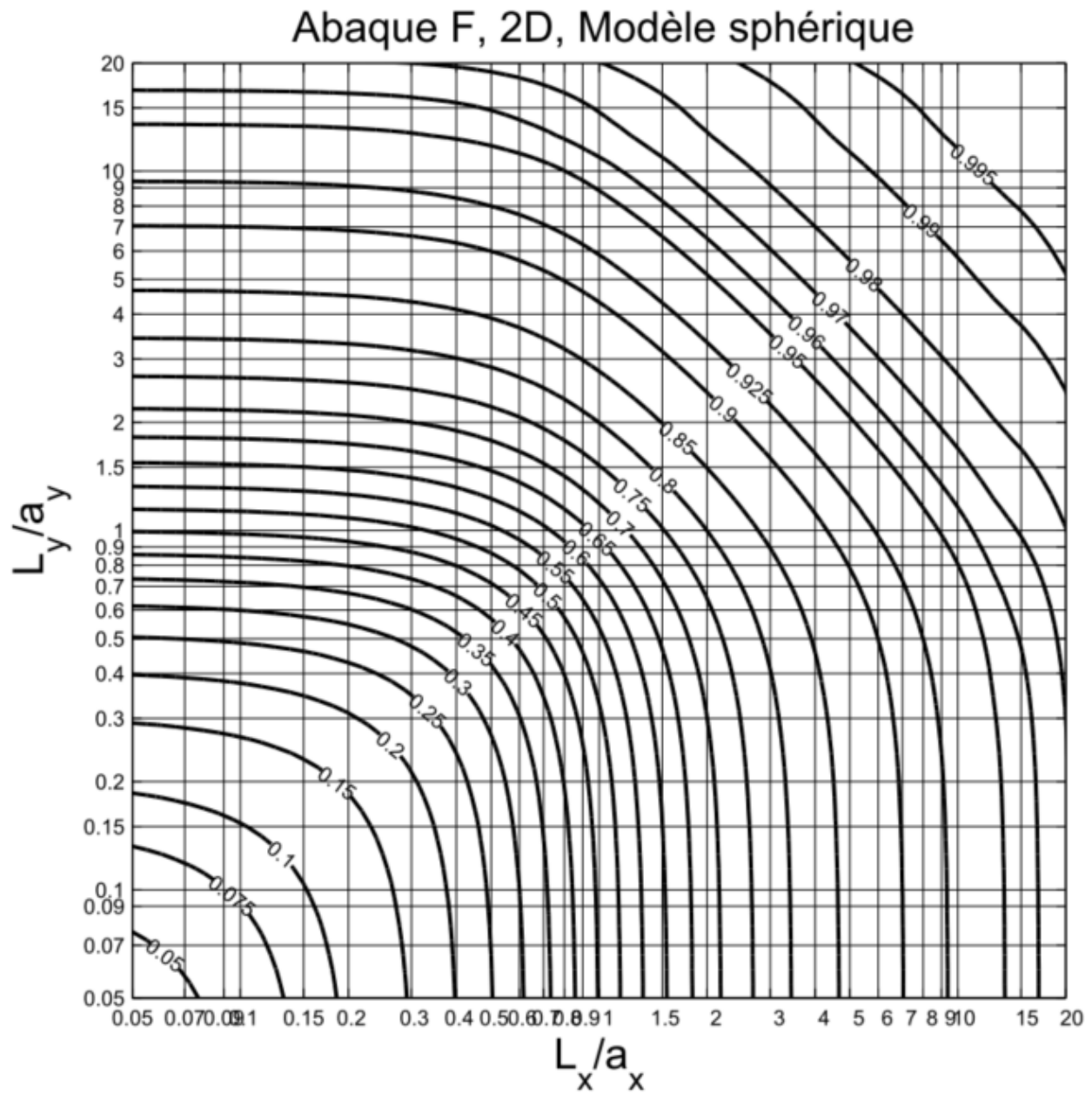
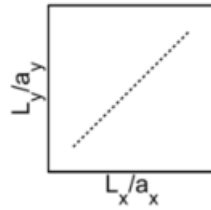
Question 8 (10 points)

Une zone d'un gisement 3D d'or est reconnue à l'aide de 49 forages verticaux de 201 m de longueur chacun. Les forages sont situés sur une grille régulière et sont espacés de 50 m (en x et en y). Les carottes de 3 m analysées en continu tout le long du forage ont permis d'identifier un modèle de variogramme sphérique avec $C_0 = 10 \text{ ppm}^2$, $C_1 = 90 \text{ ppm}^2$ et présentant une anisotropie géométrique avec $a_x = a_y = 100 \text{ m}$ et $a_z = 40 \text{ m}$. On considère le modèle isotrope dans le plan horizontal formé des axes x-y.

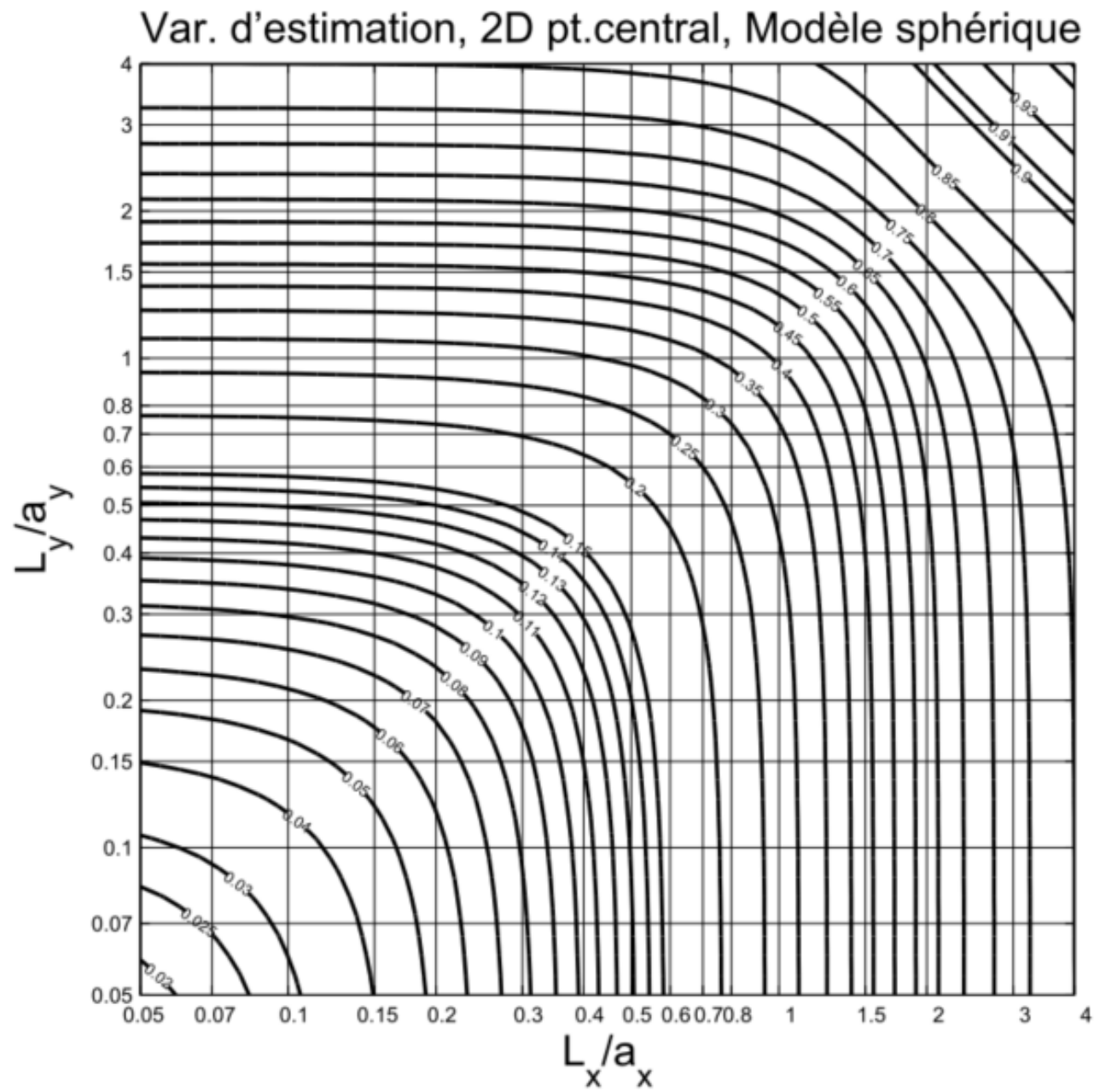
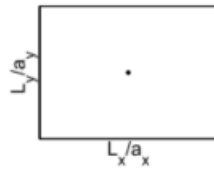
Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en or pour l'ensemble de la zone couverte par les 49 forages ?

Abaques

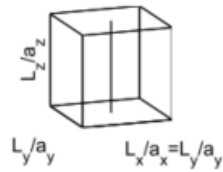
1- Variance de dispersion d'un point dans un rectangle, modèle sphérique



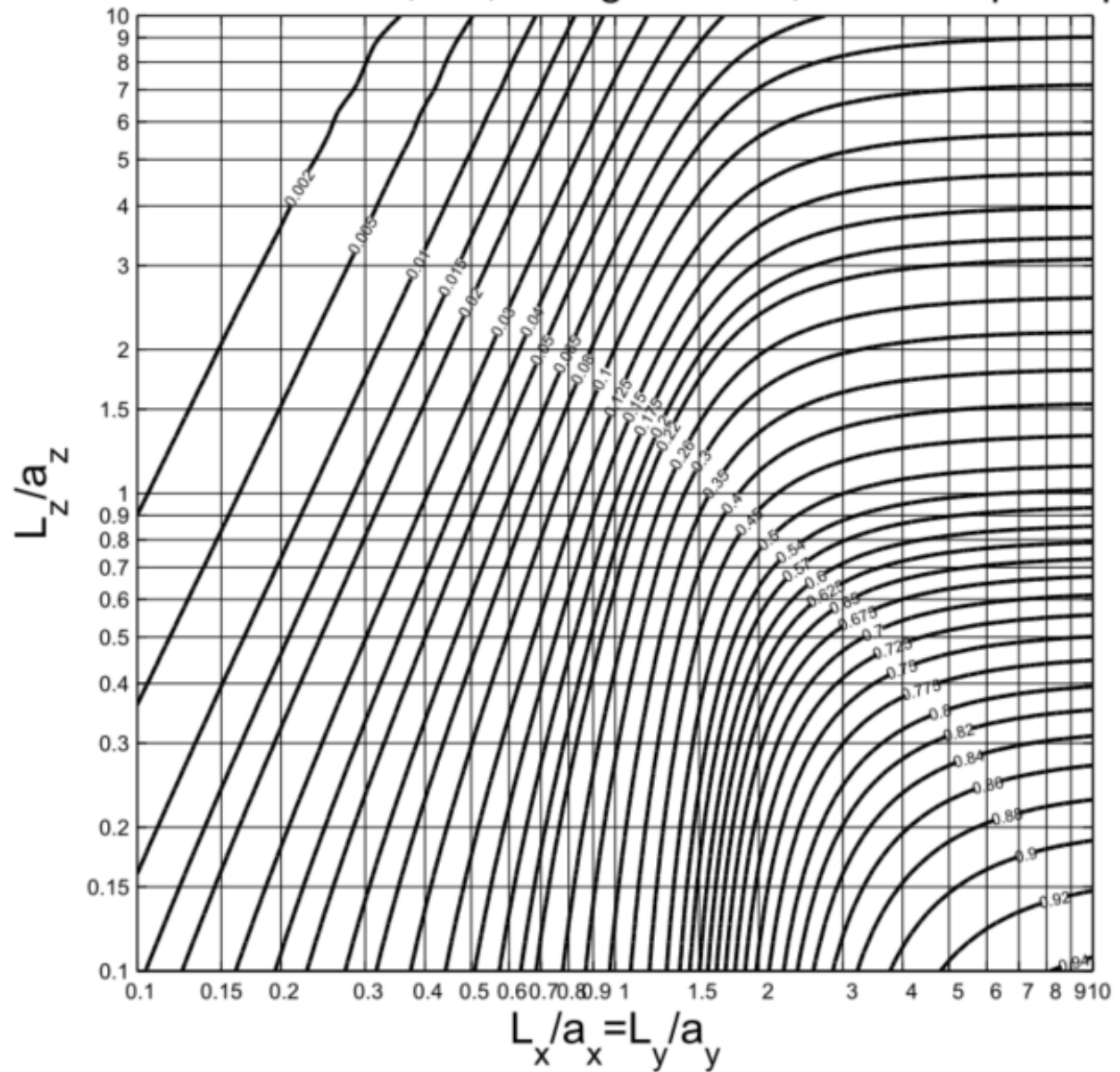
2- Variance d'estimation d'un rectangle par son point central, modèle sphérique



3- Variance d'estimation d'un bloc à section carrée par le forage central, modèle sphérique



Var. d'estimation, 3D, Forage central, Modèle sphérique



Corrigé :

$$Q1 \text{ a) } \gamma(10) = 1/12 [(2-2)^2 + (2-14)^2 + (20-4)^2 + (3-16)^2 + (9-1)^2 + (11-1)^2] = 61.08 \%^2$$

$$\gamma(28.8) = 1/14 [(19-2)^2 + (6-7)^2 + (7-20)^2 + (12-4)^2 + (1-12)^2 + (14-9)^2 + (1-14)^2] = 59.86 \%^2$$

b) Non il ne sera pas bien ajusté pour 2 raisons. Premièrement l'effet de pépité sera complètement filtré puisque les valeurs krigées sont continues (on ne krige qu'en des points sans donnée). Deuxièmement, on a la propriété de lissage du krigeage qui nous dit que la variance des valeurs krigées sera inférieure à la variance des données. Donc le plateau sera inférieur (ceci demeure vrai même s'il n'y a pas d'effet de pépité). Une ou l'autre de ces raisons est suffisant.

Q2-

a) pour la petite pile : $C_1(1-F(20/100, 50/40)) = 35*(1-0.55) = 15.75 \%^2$

pour la grande pile $C_1(1-F(40/100, 100/40)) = 35*(1-0.77) = 8.05 \%^2$

b) oui car l'on a une anisotropie géométrique. Ainsi, pour la grande pile, si le bloc est orienté dans l'autre sens, on trouve :

$$C_1(1-F(100/100, 40/40)) = 35*(1-0.66) = 11.9 \%^2 \text{ et l'on ne rencontre pas l'objectif de la cimenterie.}$$

c) Comme il n'y aurait pas de variation tant que l'on est dans la pile, le variogramme serait 0 pour tout Δt .

d) La variance que l'on verra sur une très longue période sera simplement la variance des blocs de la taille de la pile, soit $8.05 \%^2$

Q3- a)

$$A=B, C=30, D=1, E=0, F=1, G=8.29 \text{ ppm}^2$$

Pour trouver A : distance 1-2 = $450^{0.5} = 21.2 \text{ m}$

azimut 1-2 = 45 degrés $\text{atan}(15/15)$

theta = 45-30 = 15 degrés

$$a_{\theta} = 50*25 / [25^2 \cos(15)^2 + 50^2 \sin(15)^2]^{0.5} = 45.6 \text{ m}$$

$$C(h_{12}) = 20*[1-(1.5(21.2/45.6)-0.5(21.2/45.6)^3)] = 7.06 \text{ ppm}^2$$

b) Les portées sont les mêmes et C_0 et C_1 sont multipliés par le facteur $24/20 = 6/5$. Les estimés obtenus par krigeage ne changent pas lorsque le modèle est multiplié par une constante.

c) Les variances de krigeage vont être multipliées par $6/5$.

d) Il suffit d'ajouter 3 ppm^2 sur la diagonale à la 2^e position donc 33 ppm^2 au lieu de 30 ppm^2 .

Q4.

Zone	nombre d'extensions élémentaires (points)	variance pour une extension	variance pour l'ensemble	surface de la zone
1	200	$5+20*F(10/20, 5/20)=5+20*0.3 = 11$	$8.2/200 = 0.055$	10000
2	96	$7+12*E(10/20, 5/10)=7+12*0.19 = 9.28$	$9.28/96 = 0.097$	4800
3	-	-	0.13	4500

Globalement : $(10000^2 \cdot 0.055 + 4800^2 \cdot 0.097 + 4500^2 \cdot 0.13) / 19300^2 = 0.0278 \text{ \%}^2$

Q5. a) On va avoir un système avec une équation de moins que d'inconnues. Il y aura une infinité de solutions. La matrice de krigeage sera singulière et ne pourra pas être inversée.

b) Oui c'est possible puisque le krigeage peut fournir des poids négatifs.

c) Oui c'est possible puisque la somme des poids donne 1 et qu'il peut y avoir des poids négatifs, donc la somme des poids positifs peut dépasser 1, ce qui permet de prédire parfois des valeurs supérieures à celles observées.

d) Faux, on n'a besoin que de connaître les poids utilisés et le variogramme. Donc on peut calculer la variance d'estimation pour toute méthode d'estimation.

e) Vrai. ex. Si l'on a des données prélevées selon des lignes, il est important que le voisinage permette de rejoindre au moins une ligne de part et d'autre du point à estimer.

Q6.

a) Les variances de krigeage nous indiquent que le patron du centre capture mieux la continuité spatiale du gisement. En plus, les poids de la figure du centre sont plus importants dans l'azimut 20. Il y a alors présence d'une anisotropie. La grande portée est dans la direction nord avec une légère inclinaison vers l'est (environ $10\text{-}20^\circ$), car les poids de la figure du centre ne sont pas symétriques autour de la zone estimée.

b) Celui du centre. La variance de krigeage est la plus faible.

c) Oui, une ellipse orientée dans la direction de la grande continuité.

d) Validation croisée. Le rapport $C_0/(C_0+C_1)$, a_g , a_p , l'azimut de a_g et le voisinage. D'autres réponses peuvent être acceptées si bien justifiées.

Q7- Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La portée principale est selon la direction 167.5 degrés et la portée minimale selon 77.5 . Les portées sont $a_g=150$ m et $a_p=50$ m. $C_0=10 \text{ \%}^2$ et $C_1=30 \text{ \%}^2$.

Q8- On a 49 parallélépipèdes de 201m de long $\times$ 50m $\times$ 50m . On peut utiliser l'abaque 8. On a $201/3=67$ carottes dans chaque forage. Donc pour un bloc : $\text{Var}(e) = 10/67 + 90 \cdot E(50/100, 201/40) = 10/67 + 90 \cdot 0.01 = 1.049$.

Pour l'ensemble des 49 forages, on obtient : $1.049/49 = 0.021 \text{ ppm}^2$