

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
2^e contrôle périodique - Automne 2017

Date : 2 novembre 2017, heure : 13h45 à 16h15

L'examen comprend 8 questions, sur 15 pages, valant 100 points.

Quatre pages d'annexes sont fournies

Les questions valent dans l'ordre : 10, 10, 10, 10, 17, 20, 8, 15.

-
- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen.**
 - Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.
 - Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire.
 - Deux feuilles recto-verso permises; toute calculatrice permise.
 - **Bien indiquer les unités dans chaque réponse finale**
-

Prénom _____ Nom _____ Matricule : _____
(lettres carrées)

Signature : _____

Question 1 (10 points)

Un ingénieur géologue dispose de valeurs estimées de teneurs de Cu pour des blocs de 20 m x 20 m x 10 m qui représentent les unités de sélection de la mine. La méthode par laquelle ces estimés ont été obtenus n'est pas spécifiée. Les statistiques élémentaires calculées sur ces valeurs estimées sont :

Statistique	Valeurs estimées pour les blocs
Moyenne	1%
Variance	3.8% ²
Minimum	0%
Maximum	7%

Le gisement est grand par rapport à la portée du variogramme et homogène statistiquement, les données ponctuelles montrent un variogramme sphérique (3D) isotrope avec $C_0=2\%$, $C=4\%$ et $a=100$ m.

Question 1 (suite)

7 points a) Pourquoi pouvons-nous affirmer que les valeurs estimées ont un biais conditionnel? Justifiez en faisant le calcul approprié.

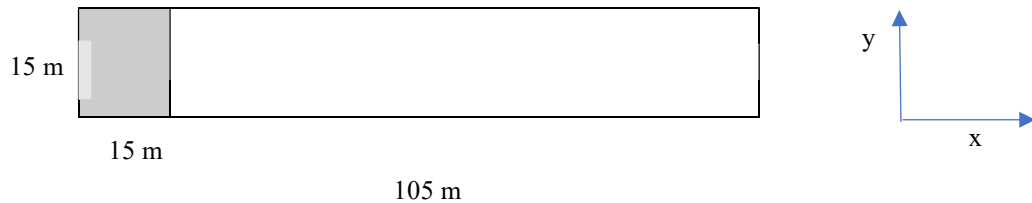
3 points b) Quelle est la conséquence pratique d'utiliser ces valeurs estimées pour sélectionner le minerai à traiter?

Question 2 (10 points)

L'exploitant d'une carrière veut minimiser la variabilité quotidienne de la teneur en C3S du ciment sur un horizon d'une semaine. Durant la semaine, il exploite un bloc de 105 m x 15 m x 5 m (en x, y et z). On considère, pour simplifier le problème, que le bloc reste en place lors du sautage. Le gisement montre un variogramme sphérique (2D car les teneurs sont mesurées sur toute l'épaisseur du banc de 5 m) avec $C_0=150 \text{ } \%$, $C=600 \text{ } \%$ et une anisotropie géométrique. Les portées principales sont orientées selon x, y et valent $a_x=100 \text{ m}$, $a_y=30 \text{ m}$. La pelle peut charger les camions soit en se déplaçant perpendiculairement au tas de roche, soit en se déplaçant parallèlement. On suppose que le coût d'exploitation est le même dans les deux cas.

Schématiquement, vu en plan :

Déplacement perpendiculaire à l'allongement :



Déplacement parallèle à l'allongement :



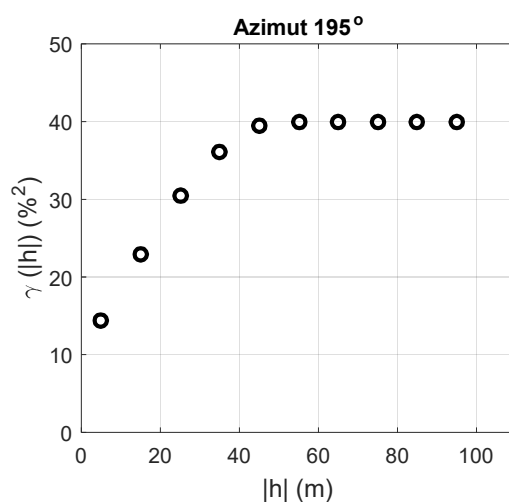
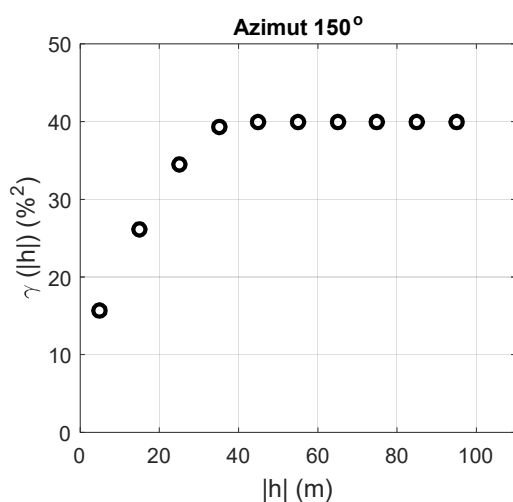
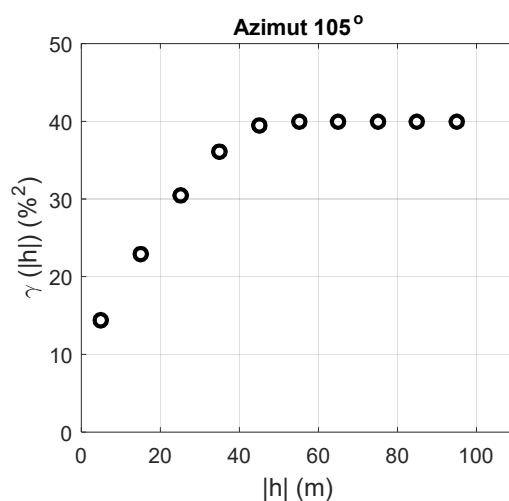
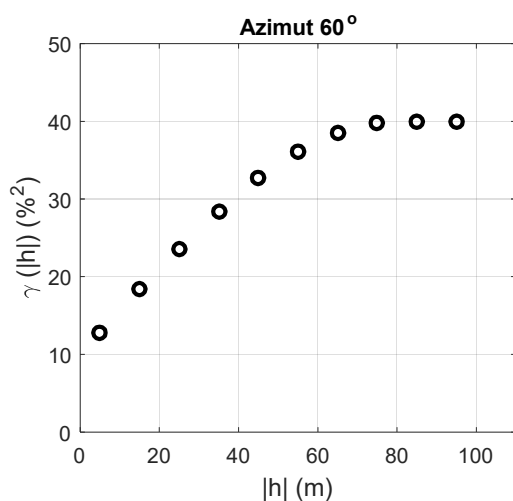
(Note : Les dessins ne sont pas à l'échelle, *en gris* la zone exploitée quotidiennement)

Quel déplacement de la pelle recommanderiez-vous pour minimiser la variabilité de la teneur quotidienne en C3S au cours de la semaine ? Justifiez en effectuant les calculs requis.

Question 2 (suite)

Question 3 (10 points)

Soit les 4 variogrammes expérimentaux suivants obtenus pour un gisement 2D de Cu :



5 points a) Décrivez le modèle 2D de variogramme (en spécifiant tous les paramètres du modèle et leurs unités), permettant un ajustement adéquat de ces variogrammes expérimentaux.

Question 3 (suite)

5 points *b) Soit les points situés en $(x=0, y=0)$ et $(x=20, y=0)$. Calculez la valeur du variogramme théorique entre ces deux points avec le modèle décrit en a). (Note; x croît vers l'est et y vers le nord).*

Question 4 (10 points)

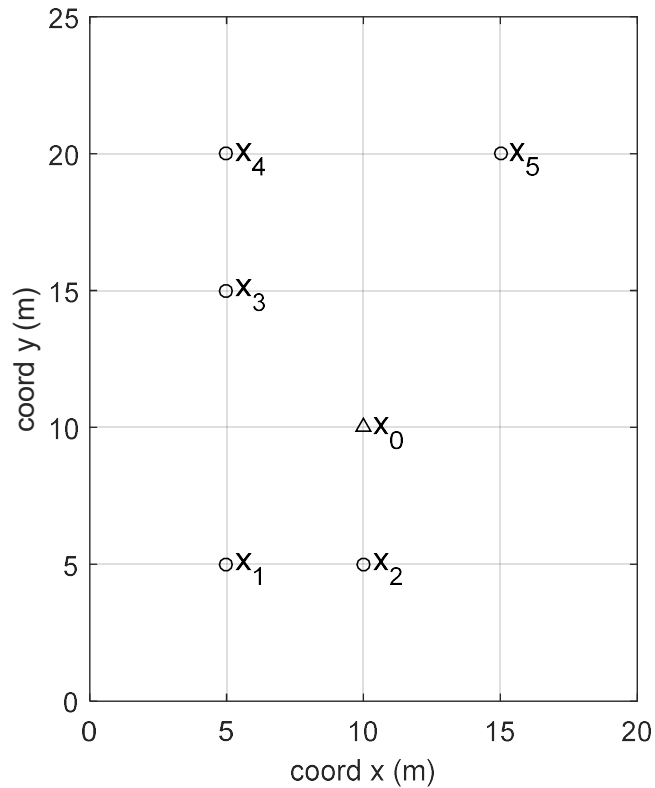
Une mine de sel (NaCl) livre son sel par bateau. Le minerai livré au bateau doit présenter par contrat une teneur supérieure à 94% NaCl. La mine échantillonne le flux de minerai entrant au bateau en prenant un échantillon ponctuel d'un kilogramme à chaque heure en débutant à la première demi-heure de chargement. L'échantillon est prélevé sans biais. Le modèle de variogramme du NaCl montre $C_0=0.7 \text{ } \%^2$, il comprend une composante sphérique de portée $a_1=1$ heure et ayant $C_1=1.3 \text{ } \%^2$ et une deuxième composante sphérique de portée $a_2=5$ heures et ayant $C_2=2.1 \text{ } \%^2$. Le chargement du bateau prend en tout 48 heures.

7 points a) Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en NaCl du minerai livré au bateau ?

3 points b) Utilisant la variance d'estimation calculée en a) et supposant une distribution normale de la teneur du minerai livré (table en annexe), si la moyenne des 48 échantillons est de 94.3 % NaCl, quelle est la probabilité que la teneur moyenne réelle du minerai livré soit inférieure à 94 % ? (Note : si vous n'avez pu déterminer la variance d'estimation en a) supposez $\text{Var}(e)=0.024 \text{ } \%^2$).

Question 5 (17 points)

Dans un gisement de Zn, on veut estimer le point x_0 avec les points x_1 à x_5 (voir figure). Le variogramme est sphérique, isotrope, avec $C_0=4 \text{ } \%$, $C=9 \text{ } \%$ et $a=10\text{m}$.



Les valeurs qui suivent peuvent vous être utiles

h	$C(h)^1$
5	2.81
$(50)^{1/2}$	1.05
10	0

¹arrondi à la 2^e décimale

8 points a) Construisez le système de krigeage ordinaire pour ce problème. Exprimez les équations du krigeage sous leur forme matricielle (ne pas résoudre).

Question 5 (suite)

La solution du système de krigeage ordinaire est :

λ_1		0.1675
λ_2		0.3410
λ_3	=	0.2166
λ_4		0.1140
λ_5		0.1609
μ		-2.0915

3 points b) Calculez la variance de krigeage ordinaire.

3 points c) Si l'on avait plutôt effectué un krigeage simple, y aurait-il eu un ou plusieurs poids de krigeage simple exactement 0? Si oui, lequel ou lesquels?

3 points d) Quelle serait la variance d'estimation si l'on avait estimé le point x_0 par méthode polygonale?

Question 6 (20 points)

Répondez par vrai ou faux (aucune justification requise; 1 point par bonne réponse, -0.5 par mauvaise réponse et 0 pour une absence de réponse). Dans tous les cas, supposez qu'un modèle admissible de variogramme est utilisé.

#	Énoncé	Vrai	Faux
1	Dans une validation croisée (des résultats d'un krigeage), on peut toujours ajuster les paramètres du variogramme de façon à ce que l'écart-type des résidus normalisés soit exactement 1.		
2	Si l'on effectue le krigeage en une série de points en utilisant toutes les données disponibles et qu'un échantillon ultérieur confirme la valeur krigée en un point donné, alors un nouveau krigeage incluant cette donnée modifierait les valeurs estimées aux autres points sans toutefois changer la variance de krigeage.		
3	À cause de l'effet d'écran du krigeage, le choix du voisinage utilisé pour le krigeage n'a <u>jamais</u> beaucoup d'importance.		
4	La mesure d'efficacité du krigeage $\frac{[Var(Z_v) - \sigma_k^2]}{Var(Z_v)}$ permet d'évaluer la précision du krigeage tout en assurant une certaine robustesse face au choix de modèle de variogramme. On pourrait s'en servir pour déterminer les catégories de ressource.		
5	On peut effectuer une estimation équivalente à la méthode polygonale par krigeage ordinaire en limitant le voisinage utilisé pour le krigeage à une seule observation.		
6	On peut effectuer une estimation équivalente à une moyenne locale des données en effectuant un krigeage avec voisinage local et un variogramme effet de pépite pur.		
7	La variance de krigeage ordinaire ne peut jamais être supérieure au palier du variogramme.		
8	La variance de krigeage ordinaire n'est jamais nulle en raison de la présence du multiplicateur de Lagrange		
9	Comme il peut y avoir des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des teneurs estimées par krigeage qui soient négatives.		
10	Comme il y a des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des variances de krigeage négatives.		

Question 6 (suite)

#	Énoncé	Vrai	Faux
11	Si l'on estime par krigeage les teneurs sur une grille ponctuelle et que l'on calcule le variogramme des valeurs krigées, on doit s'attendre à retrouver le même variogramme que celui utilisé pour le krigeage en autant que l'hypothèse de stationarité soit valide et que le « bon » modèle de variogramme ait été utilisé.		
12	Le modèle gaussien de variogramme ne devrait pas être utilisé pour décrire le comportement de <u>teneurs ponctuelles</u> d'un gisement car il exprime une trop grande continuité spatiale pour ce type de variable.		
13	Pour les modèles de covariance vus au cours, la variance de dispersion $D^2(v V)$ (avec v inclus dans V) est toujours inférieure à σ_v^2 .		
14	La détermination précise du palier du variogramme est requise pour calculer correctement les variances de dispersion $D^2(v V)$ lorsque « V » est grand par rapport à la portée du variogramme.		
15	Pour un variogramme sphérique avec palier $C+C_0$ et portée a , la variance de bloc augmente avec l'augmentation de l'effet de pépité C_0 .		
16	Dans un contexte minier, il est souhaitable afin de détecter d'éventuelles anisotropies de calculer les variogrammes expérimentaux le long des directions prises par les forages en allouant une faible tolérance angulaire.		
17	Avec un modèle sphérique de variogramme, plus l'effet de pépité est important, plus l'effet d'écran du krigeage est marqué.		
18	Plus l'effet de pépité est important, plus le krigeage montre de fortes discontinuités aux points échantillons.		
19	Le krigeage ordinaire est sans biais, et ce, indépendamment du fait que l'on ait, ou pas, le bon modèle de variogramme.		
20	L'anisotropie identifiée sur les variogrammes expérimentaux calculés suivant différentes directions devrait, en raison de la tolérance angulaire appliquée, surestimer la véritable anisotropie.		

Question 7 (8 points)

Le tableau suivant présente 8 modèles de variogramme. La figure de la page suivante montre les résultats d'un krigeage en 1D effectué avec les mêmes points échantillons et chacun des modèles du tableau. Les figures de gauche donnent la valeur estimée en fonction de la coordonnée x et les figures de droite donnent la variance de krigeage en fonction de la coordonnée x .

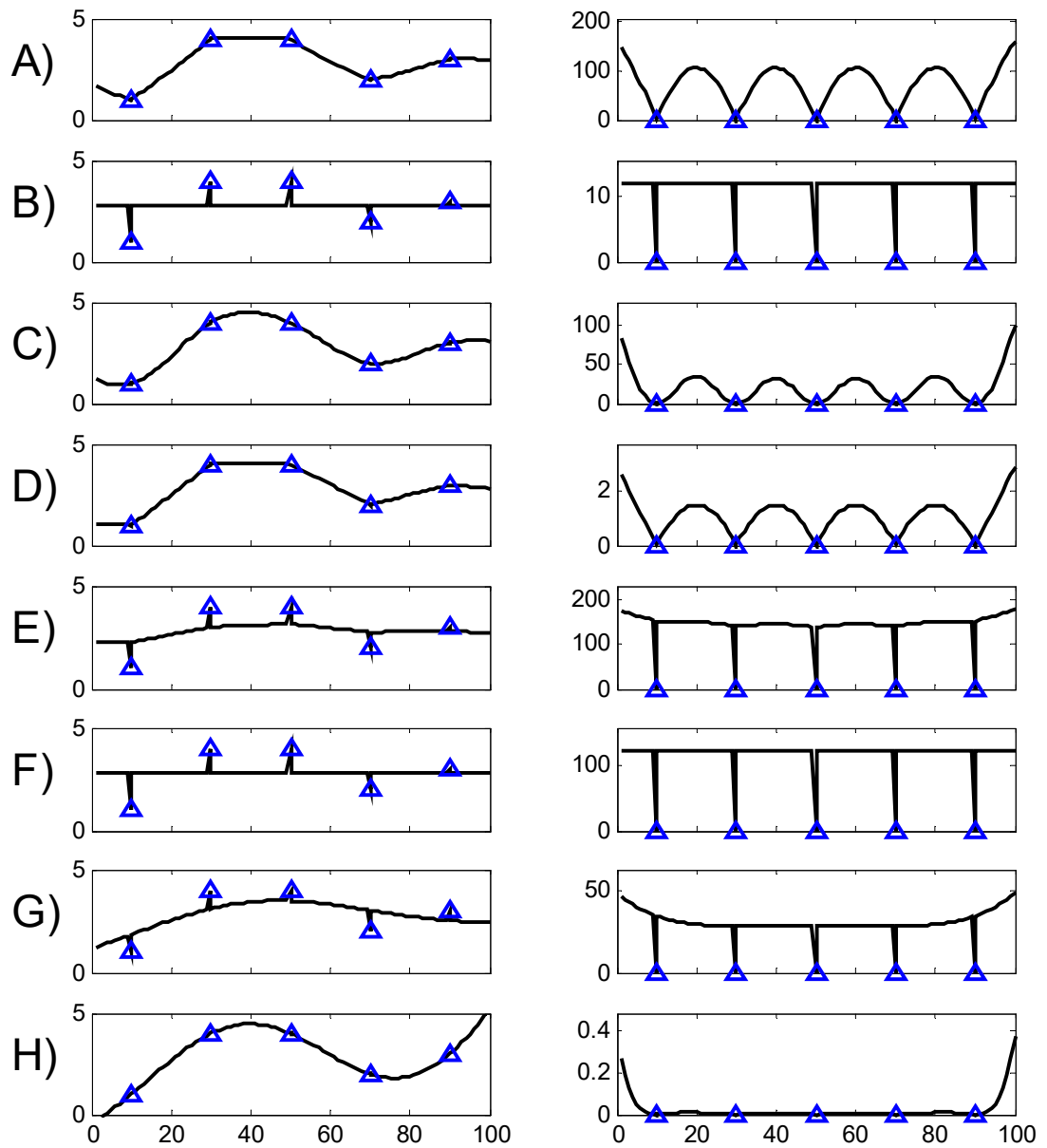
Modèle #	Description	Figure associée (A à H)
1	Sphérique $a = 100$, $C = 10$	
2	Sphérique $a = 30$, $C = 200$	
3	Sphérique, $a=100$, $C_0 = 100$, $C = 100$	
4	Gaussien $a_{\text{effectif}} = 100$, $C = 200$	
5	Gaussien $a_{\text{effectif}} = 100$, $C_0 = 20$, $C = 180$	
6	Gaussien $a_{\text{effectif}} = 30$, $C = 200$	
7	Effet de pépité pur avec $C_0 = 10$	
8	Effet de pépité pur avec $C_0 = 100$	

Tableau

Associez une figure (de A à H) à chacun des modèles du tableau (répondez dans le tableau)

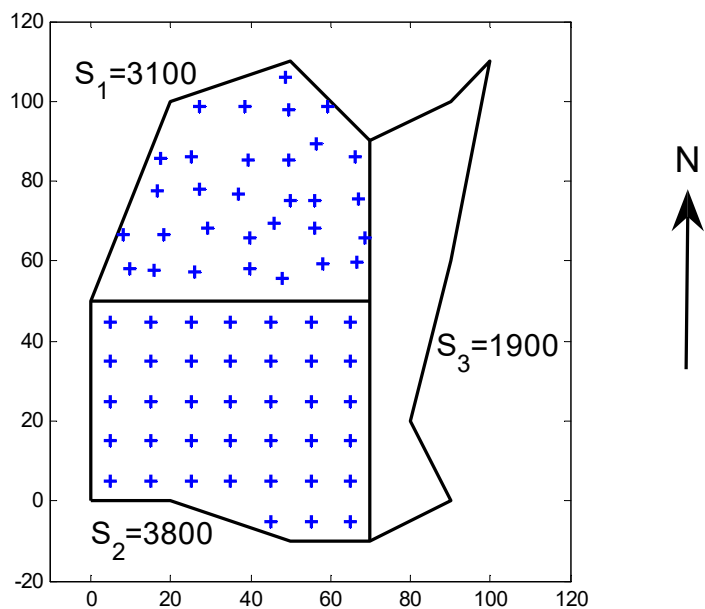
Valeurs estimées par KO

Variance de krigage



Question 8 (15 points)

La figure suivante montre trois zones différentes de surface S_1 , S_2 et S_3 dans une zone d'une mine de Cu. On a 31 observations dans S_1 et 38 observations dans S_2 . L'échantillonnage pour la zone S_1 peut être considéré aléatoire stratifié sur une maille de 10 m x 10 m alors qu'il est sur une grille régulière de 10 m x 10 m pour la zone S_2 . La variance d'estimation pour la teneur moyenne de la zone S_3 , estimée avec des données se retrouvant uniquement dans S_3 , vaut $0.1\%^2$ (calculée avec un programme de krigeage). Le variogramme est sphérique avec $C_0=0.5\%^2$, $C=6\%^2$ et $a=50\text{m}$.



12 points a) Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne de l'ensemble constitué des 3 zones?

Question 8 (suite)

3 points b) Pourquoi dans l'énoncé du problème est-il important de spécifier que la zone S_3 a été estimée en utilisant uniquement les données s'y retrouvant et donc sans utiliser les données de S_1 et S_2 ?

Fin de l'examen

Corrigé

Q1 a) $\text{Var}(Z_v) = C(1 - F(10/100, 10/100)) = 4 * (1 - 0.17) = 3.32 \%^2$

Comme les valeurs estimées montrent une variance supérieure à celle des blocs qu'ils estiment on est certain qu'il y a un biais conditionnel.

b) On va récupérer une teneur plus faible que prévue => on va faire moins de profits que prévus.

Q2- Soit S : semaine, L : bloc parallèlement et P : bloc perpendiculairement

$D2(P|S) = C(F(S) - F(P)) = 600(F(105/100, 15/30) - F(15/100, 15/30)) = 600 * (0.55 - 0.27) = 168 \%^2$

$D2(L|S) = 600(F(105/100, 15/30) - F(105/100, 2.14/30)) = 600(0.55 - 0.45) = 60 \%^2$

Comme $60 < 168$, on doit prendre le bloc parallèlement.

Q3- a) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. Les directions principales sont 60 et 150 avec des portes de 80 m et 40 m respectivement. $C0 = 10\%^2$ et $C = 30\%^2$

b) La direction reliant les deux points est selon x. Forme un angle de 30 degrés avec a_g . On calcule

$a_{30} = 40 * 80 / (\cos(30)^2 * 40^2 + \sin(30)^2 * 280^2)^{0.5} = 60.47$

$\gamma(20) = 10 + 30 * (1.5(20/60.47 - 0.5 * (20/60.47)^3)) = 24.34 \%^2$.

Q4- a) Pour 1 segment : $C0 + C1 E(1/1) + C2 * E(1/5) = 0.7 + 1.3 * 0.27 + 2.1 * 0.05 = 1.156$

Pour les 48 heures : $1.156 / 48 = 0.0241 \%^2$

b) $Z_{réel} < 94$ signifie $e = Z_{réel} - Z_{est} < -0.3$

on a $e \sim N(0, 0.024)$ Donc $P(e < -0.3) = P(N(0, 1) < -0.2 / 0.024^{0.5}) = P(N(0, 1) < -1.93) = 0.027$

Q5-

a) $K \lambda = k$

K= 13.00	2.81	0.00	0.00	0.00	1.00	a1	1.05
2.81	13.00	0.00	0.00	0.00	1.00	a2	2.81
0.00	0.00	13.00	2.81	0.00	1.00	a3	= 1.05
0.00	0.00	2.81	13.00	0.00	1.00	a4	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	13.00	1.00	a5	0.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	mu	1.00

b) $\lambda'k = 13.73$

c) oui λ_5 car le point x_5 n'est corrélé à aucun autre point.

d) On estime par le point x_2 , $C(x_0, x_2) = 2.81$. Soit avec la formule de covariance : $13 + 13 - 2 * 2.81 = 20.38$, soit avec formule de variogramme $2 * (13 - 2.81) = 20.38$.

Q6-

V F F V V V F F V F

F V V V F V F V V F

Q7- D A E H G C B F

Q8 a) Zone S1 : $(0.5 + 6 F(10/50, 10/50)) / 31 = (0.5 + 6 * 0.16) / 31 = 0.047$

Zone S2 : $(0.5 + 6 E(10/50, 10/50)) / 38 = (0.5 + 6 * 0.075) / 38 = 0.025$

Pour S3 = 0.1

Globalement: $(3100^2 * \text{Var}(S1) + 3800^2 * \text{Var}(S2) + 1900^2 * 0.1) / (3100 + 3800 + 1900)^2 = 0.015 \%^2$

b) Pour que l'on puisse combiner ainsi les variances d'estimation par zone, il faut pouvoir négliger les covariances des erreurs. Celles-ci sont négligeables lorsque les estimations sont effectuées avec des ensembles différents de données.