

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)
GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES

2^e contrôle périodique - Automne 2013

Date : 31 octobre 2013

Heure : 13h45 à 16h15

Deux feuilles de documentation recto-verso permises.

Toutes les calculatrices sont permises.

Vous répondez directement sur le formulaire.

Le professeur ne répond pas aux questions durant l'examen. Si vous trouvez une question moins claire, indiquez votre interprétation.

Utilisez le verso si vous manquez d'espace. Écrivez lisiblement.

Vous déposez vos téléphones et autres appareils électroniques à l'avant ou à l'arrière de la classe.

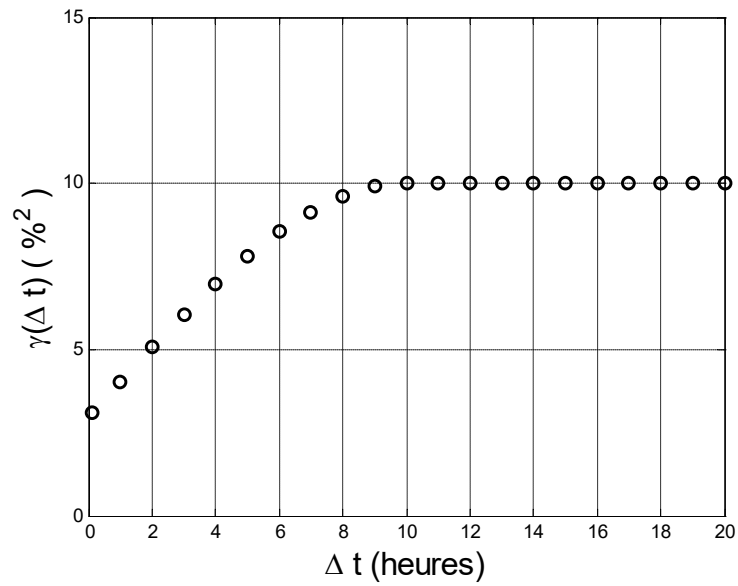
L'examen comporte 8 questions totalisant 100 points : 15 points pour Q1, Q5, Q7 et Q8, et 10 points pour les autres questions.

Nom de l'étudiant : _____

Signature : _____ **Matricule :** _____

Question 1 (15 points)

Un des composés déterminant la qualité du ciment est le C3S (abréviation pour Ca_3SiO_4 , exprimé en %) qui contrôle la résistance initiale du ciment. Lafarge (St-Constant) dispose d'un échantillonneur automatique qui prélève un échantillon ponctuel à toutes les heures et détermine la valeur du C3S de l'échantillon. Ces données sont utilisées pour calculer un variogramme (temporel) du C3S. La figure suivante montre le variogramme expérimental obtenu. Un client important achète la production de ciment d'une journée complète. Il désire un C3S moyen d'au moins 54% pour le ciment acheté. La moyenne des 24 échantillons prélevés par Lafarge durant cette journée donne C3S=55%. On suppose que l'erreur d'estimation pour la teneur moyenne sur une période de 24 heures suit une distribution normale (Table normale fournie en annexe).



5 pts a) *Quel est le modèle de variogramme (type et paramètres) qui permet un ajustement adéquat au variogramme expérimental? Indiquez clairement les unités des paramètres fournis.*

6 pts b) *Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en C3S pour une journée ?*

Question 1 (suite)

4 pts c) *Quelle est la probabilité que le ciment fourni par Lafarge montre en réalité une valeur moyenne en C3S inférieure à 54% ?*

Question 2 (10 points)

Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 30^0 . Les paramètres du modèle sont $C_0=10 \text{ ppm}^2$, $C=20 \text{ ppm}^2$, $a_{30}=50 \text{ m}$, $a_{120}=25\text{m}$.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (100,100). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	80	90	10
2	95	105	4
3	103	104	7
4	107	92	3

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} 30 & A & 2.43 & 0.09 & 1 \\ B & C & 11.17 & 2.68 & 1 \\ 2.43 & 11.17 & 30 & 8.29 & 1 \\ 0.09 & 2.68 & 8.29 & 30 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.82 \\ 11.94 \\ 16.95 \\ 8.43 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7 pts a) Que valent les entrées A à E ?

Question 2 (suite)

3 pts

b) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Que doit-on modifier dans le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information?

Question 3 (10 points)

Une compagnie minière de fer envisage l'utilisation d'une pile pour homogénéiser son minerai. Le variogramme ponctuel en 3D du gisement montre une anisotropie géométrique. Le modèle est sphérique avec $a_x=a_y=200\text{m}$ et $a_z=50\text{m}$; $C_0=5\%^2$ et $C=90\%^2$. Le modèle est isotrope dans le plan horizontal.

La compagnie considère l'utilisation de deux types de pile :

- une pile de type circulaire de capacité 48Kt (bloc de 40m x 40m x 10m à la mine)
- une pile de type linéaire de capacité 210Kt (bloc de 83.7m x 83.7m x 10m à la mine)

Les deux piles seraient bien conçues en ce sens qu'elles permettraient d'homogénéiser très bien les teneurs à l'intérieur d'une même pile.

Soit l'énoncé suivant :

La pile de type linéaire assurera des teneurs homogènes pour une période « a » fois plus longue que la pile de type circulaire. Pour la pile de type linéaire, les changements de pile survenant durant l'exploitation causeront, sur une longue période, une variance de la teneur égale à « b » fois celle de la pile de type circulaire.

Que valent « a » et « b » dans cet énoncé ?

Question 4 (10 points)

4 pts a) *Décrivez l'impact sur les variogrammes expérimentaux d'erreurs de localisation des observations.*

3 pts b) *Dans un contexte minier (3D),*

i. pourquoi est-il généralement préférable de calculer les variogrammes expérimentaux selon les orientations (i.e. direction et plongée) coïncidant avec les orientations des forages ?

ii. quel problème peut se poser avec cette approche lorsqu'une anisotropie géométrique est suspectée ?

3 pts c) *Un variogramme sphérique isotrope montre $C_0 = 3\%$ et $C = 7\%$. Quelle est la valeur moyenne attendue de la différence au carré entre les teneurs de deux points très proches spatialement ?*

Question 5 (15 points)

Un site contaminé au Pb montre un modèle de variogramme 2D formé par la somme de 3 composantes différentes :

Composante	C (ppm ²)	a_g (m), θ_g (azimut)	a_p (m), θ_p (azimut)
Effet pépite	120	-	-
Sphérique 1	580	1000, 87°	300, 177°
Sphérique 2	1200	400, 42°	200, 132°

où θ_g est la direction de meilleure continuité et θ_p est la direction de moindre continuité.

9 pts a) Selon l'azimut 30°, à partir de quelle distance séparant deux points les teneurs en Pb sont-elles non-corrélées ?

Question 5 (suite)

6 pts b) *En supposant les autres paramètres inchangés, quelle serait la conséquence, par rapport à la situation actuelle, d'avoir un effet de pépité supérieur à 120 ppm² sur :*

- i. la variance de bloc;*
- ii. la variance d'estimation;*
- iii. la variance de dispersion d'un point dans un bloc.*

Question 6 (10 points)

On vous indique deux portions de forage sur lesquelles sont indiquées les teneurs en Au (ppm) pour des carottes de 3m. Les 2 forages sont espacés exactement de 9 m de centre à centre (le dessin n'est pas à l'échelle).

	9 m	
9 m	7.1	5.2
	2.3	4.6
	3.7	6.3
	9.1	8.1
	4.3	2.7

Calculez le variogramme expérimental omnidirectionnel (i.e. sans tenir compte de la direction) à la distance $h=9$ m exactement en prenant soin d'indiquer toutes les paires utilisées.

Question 7 (15 points)

On a observé les teneurs aux 4 points suivants (problème 2D) :

point	Coord. x (m)	Coord y (m)	teneur Z(x) (%)
x ₁	0	0	2.7
x ₂	5	0	4.1
x ₃	0	10	1.5
x ₄	10	0	3.2

Le variogramme est sphérique avec paramètres $C_0=1\%$, $C=2\%$ et $a=10\text{m}$. Le système de krigeage simple s'écrit (les entrées dans la matrice sont dans l'ordre x_1 à x_4):

$$\begin{vmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & 3 & C & 0.625 \\ 0 & C & 3 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D \\ E \\ F \\ G \end{vmatrix}$$

6 pts a) Complétez le système de krigeage simple (lettres A à G) pour l'estimation au point $x_0 = (5, 0)$.

2 pts b) Fournissez les poids de krigeage λ_1 à λ_4 .

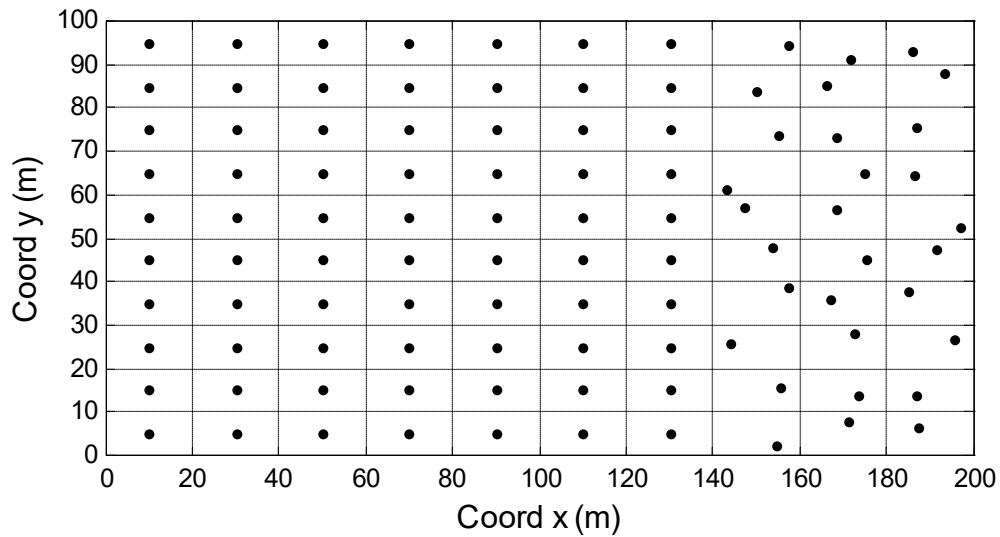
Question 7 (suite)

2 pts *c) Calculez la valeur estimée par krigeage $Z(x_0)^*$ (avec $m_z = 3\%$) et la variance de krigeage simple.*

5 pts *d) Au lieu d'estimer le point x_0 , on estime un point x_{0+} situé à une très petite distance du point $x_0 = (5, 0)$. Parmi les lettres A à G, indiquez toutes les valeurs qui changent significativement.*

Question 8 (15 points)

Un banc d'un gisement de Cu montre un variogramme 2D ponctuel isotrope de type sphérique avec $C_0=3\%^2$ et $C=11\%^2$ (modèle A) et $a=20$ m. On estime la teneur moyenne pour la zone décrite à la figure suivante à partir des teneurs connues aux points échantillons indiqués sur la figure:



10 pts a) *Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne pour l'ensemble de la zone?*

Question 8 (suite)

- 5 pts b) Une validation croisée avec ces données et le modèle A a montré les statistiques indiquées dans la colonne « modèle A » du tableau suivant. Complétez le tableau pour les statistiques de validation croisée que l'on obtiendrait avec les modèles B et C. N'indiquez que les valeurs pour lesquelles il est possible de prévoir le résultat exactement. Indiquez « np » pour les statistiques non-prévisibles avec les seuls éléments fournis. (Note : e_i est l'erreur d'estimation de la donnée « i », $\sigma_{k,i}^2$ est la variance de krigeage pour la donnée « i » lorsque la donnée « i » est estimée par les autres données.

Statistique	Modèle A, sphérique avec $C_0=3\%^2$, $C=11\%^2$, $a=20m$	Modèle B, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=20 m$	Modèle C, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=30 m$
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$	-0.2%		
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2$	$3\%^2$		
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{\sigma_{k,i}^2}$	0.667		
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{ e_i }{\sigma_{k,i}}$	0.9		

Annexes

Fonction de répartition N(0,1) : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

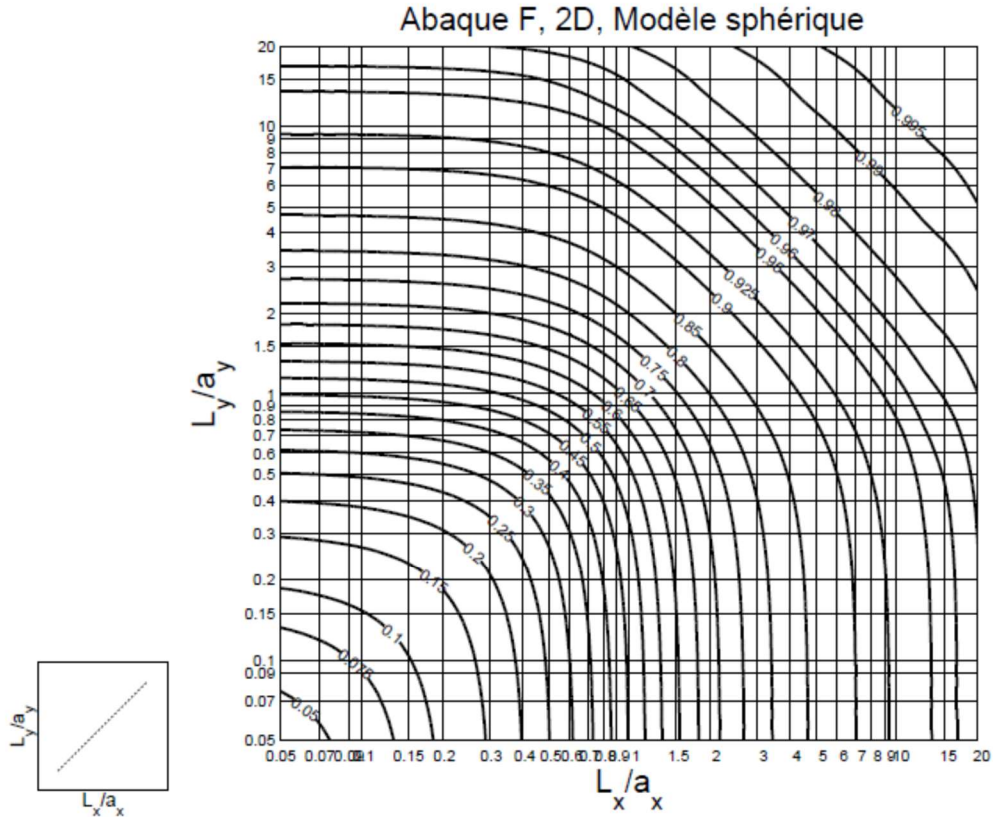


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier $C=1$; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

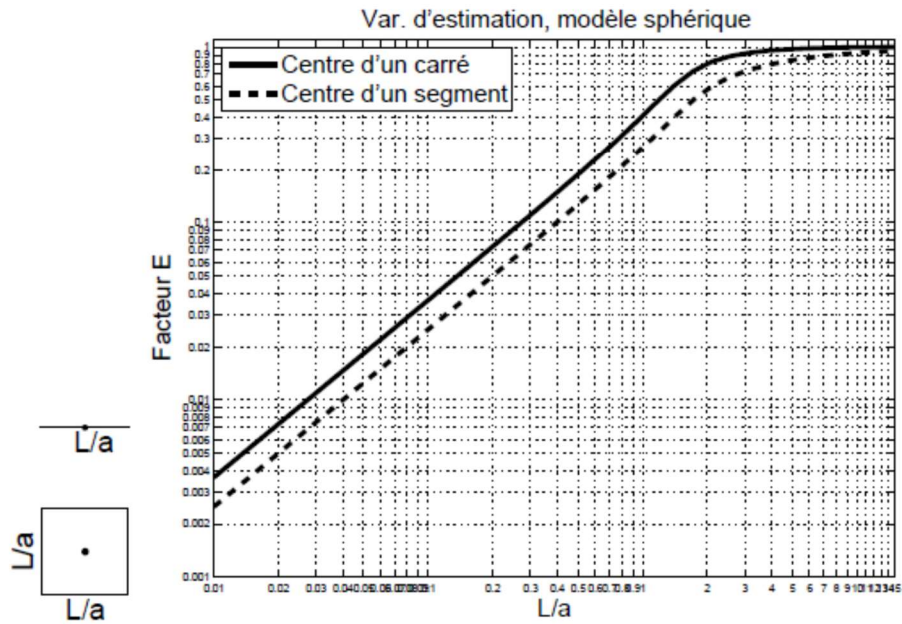


Fig. 4. Variance d'estimation: un segment ou un carré estimé par son point central

Corrigé

1- a) Variogramme sphérique avec $C_0=3\%^2$, $C=7\%^2$ et $a=10$ heures.

b) $\text{Var}(e) = (3+7 \cdot E(1/10))/24 = 0.132$

c) $P(Z < 54 | Z^* = 55) = P(e < -1) = P(N(0,1) < -1/(0.132)^{0.5}) = P(N(0,1) < -2.75) = 1 - 0.997 = 0.003$

2- a) $h_{12} = 450^{0.5} = 21.21$ m

azimut(x_1-x_2) = $45^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$

$a_{\theta} = (50 \cdot 25)/(50^2 \sin(15)^2 + 25^2 \cos(15)^2)^{0.5} = 45.63$ m

$A=B=20(1-(1.5 \cdot 21.21/45.63 - 0.5 \cdot (21.21/45.63)^3)) = 7.06$

$C=30, D=1, E=0$

b) on pose $C=30+3=33$. C'est tout ce qui change.

3) $a=210/48=83.7^2/40^2 = 4.38$

$b = \text{var}(v=83.7 \times 83.7)/\text{var}(v=40 \times 40) = [1-F(83.7/200, 83.7/200)]/[1-F(40/200, 40/200)] = (1-0.32)/(1-0.15) = 0.8$

4a) Augmenter l'effet de pépite apparent sur les variogrammes

b) i. Pour avoir suffisamment de paires et pour avoir des distances mesurées sans erreur.

ii. On peut manquer de directions différentes pour pouvoir détecter et modéliser une éventuelle anisotropie.

iii. $2 \cdot C_0 = 6 \%^2$

5a) on calcule la portée selon l'angle que forme 30° avec a_g et l'on prend la valeur maximale.

spher 1 : $\theta = 57^\circ \Rightarrow a_{\theta} = 351$ m

spher 2 : $\theta = 12^\circ \Rightarrow a_{\theta} = 376$ m, donc 376 m.

b) i. variance de bloc inchangée

ii. variance d'estimation va augmenter

iii. va augmenter de la va différence entre 120 et la nouvelle valeur.

6- $((7.1-5.2)^2 + (2.3-4.6)^2 + (3.7-6.3)^2 + (9.1-8.1)^2 + (4.3-2.7)^2 + (7.1-9.1)^2 + (2.3-4.3)^2 + (5.2-8.1)^2 + (4.6-2.7)^2)/18 = 2.18$ ppm²

7-

a) $A=3\%^2$, $B=0.625 \%^2$, $C=0 \%^2$, $D=B=0.625 \%^2$, $E=3\%^2$, $F=0$, $G=0.625\%^2$

b) tous 0 sauf λ_2 qui vaut 1

c) $Z^*=4.1\%$ et variance de krigeage = 0.

d) seul E change et devient $2\%^2$ au lieu de $3\%^2$

8 a) gauche : $(3+11 \cdot 0.31)/70 = 0.092$

droite : $(3+11 \cdot 0.55)/30 = 0.3017$

global : $(70^2 \cdot 0.092 + 30^2 \cdot 0.3017)/100^2 = 0.0722$

b)

<i>Statistique</i>	<i>Modèle A, sphérique avec $C_0=3\%^2$, $C=11\%^2$, $a=20m$</i>	<i>Modèle B, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=20 m$</i>	<i>Modèle C, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=30 m$</i>
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$	-0.2%	-0.2%	<i>np</i>
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2$	$3\%^2$	$3\%^2$	<i>np</i>
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{\sigma_{k,i}^2}$	0.667	$0.667/1.5=0.445$	<i>np</i>
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{ e_i }{\sigma_{k,i}}$	0.9	$0.9/1.5^{0.5}=0.735$	<i>np</i>