

Polytechnique Montréal
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
Examen intra - Automne 2018

Date : 2 novembre 2018

L'examen comprend 8 questions, sur 12 pages, valant 100 points.
Des pages d'annexes sont fournies
Les questions valent dans l'ordre : 11, 17, 12, 12, 12, 14, 10, 12.

-
- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen.**
 - Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.
 - La table $N(0,1)$ est fournie en page 13
 - Des abaques F sont fournis en page 14-15
 - Une abaque E est fournie en page 16
 - Deux feuilles recto-verso de documentation sont permises; toute calculatrice permise.
 - **Bien indiquer les unités dans chaque réponse finale**
-

Prénom _____ Nom _____ Matricule : _____
(lettres carrées)

Signature : _____

Question 1 (11 points)

Un ingénieur géologue dispose de valeurs estimées de teneurs de Cu pour des blocs de 20 m x 20 m x 10 m qui représentent les unités de sélection de la mine. La méthode par laquelle ces estimés ont été obtenus n'est pas spécifiée. Les statistiques élémentaires calculées sur ces valeurs estimées sont :

Statistique	Valeurs estimées pour les blocs
Moyenne	1%
Variance	3.8% ²
Minimum	0%
Maximum	7%

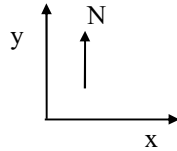
Le gisement est grand par rapport à la portée du variogramme et homogène statistiquement, les données ponctuelles montrent un variogramme sphérique (3D) isotrope avec $C_0=2\text{ \%}^2$, $C=4\text{ \%}^2$ et $a=100\text{ m}$.

8 pts a) Pourquoi pouvons-nous affirmer que les valeurs estimées ont nécessairement un biais conditionnel? Justifiez en faisant le calcul approprié.

3 pts b) On sélectionne les blocs à une teneur de coupure 1.1% en se basant sur ces teneurs estimées. Est-ce que la teneur réelle du minerai sera probablement supérieure ou probablement inférieure à la teneur moyenne estimée du minerai? Justifiez.

Question 2 (17 points)

Le tableau suivant donne les emplacements des observations servant à l'estimation de la teneur en Au au point de coordonnée $x = 50$ m, $y = 39$ m. Le variogramme est sphérique avec $C_0 = 25 \text{ ppm}^2$, $C = 65 \text{ ppm}^2$. On a une anisotropie géométrique, la meilleure continuité étant observée selon la direction 22° (azimut). Les portées principales sont de 35 m (selon 22°) et 15 m (selon 112°) respectivement. Le repère de coordonnées est orienté suivant :



Observation	coordonnée x (m)	coordonnée y (m)	teneur (ppm)
1	45	30	7.1
2	53	29	3.7
3	38	43	1.2
4	55	45	5.4

10 pts Complétez le système de krigeage ordinaire suivant (A à F) :

(note : les équations sont placées dans le même ordre que les observations)

90	18.669	3.506	A	1	λ_1	36.285
18.669	90	0	18.597	1	λ_2	20.788
3.506	0	90	0	1	λ_3	2.307
A	B	0	C	1	λ_4	39.722
1	1	1	D	E	μ	F

Question 2 (suite)

2 pts b) *Que deviendrait le système de krigeage si au lieu d'avoir observé la teneur 3.7 ppm au point 2, on avait observé plutôt 9.3 ppm ?*

On réalise après coup que les observations 1 et 2 ont été obtenues par une méthode d'analyse moins précise que pour les observations 3 et 4. L'effet de pépité pour ces observations s'en trouve doublé.

3 pts c) *Que doit-on modifier dans le système de krigeage ordinaire pour tenir compte de ce fait ?*

2 pts d) *Décrivez qualitativement l'effet anticipé de la modification proposée en d) sur les poids du krigeage ordinaire λ_1 à λ_4 ?*

Question 3 (12 points)

Une veine d'or (plan) est recoupée par des forages. La veine est d'épaisseur constante. Les teneurs sont obtenues pour toute la longueur de l'intersection du forage avec la veine. On calcule le variogramme 2D avec ces teneurs et on retient un modèle de variogramme donné par la somme des 3 composantes décrites au tableau suivant :

Composante	Portée	C_0 ou C
Pépite	-	5 ppm ²
Sphérique 1 (isotrope)	20 m	40 ppm ²
Sphérique 2 (isotrope)	80 m	20 ppm ²

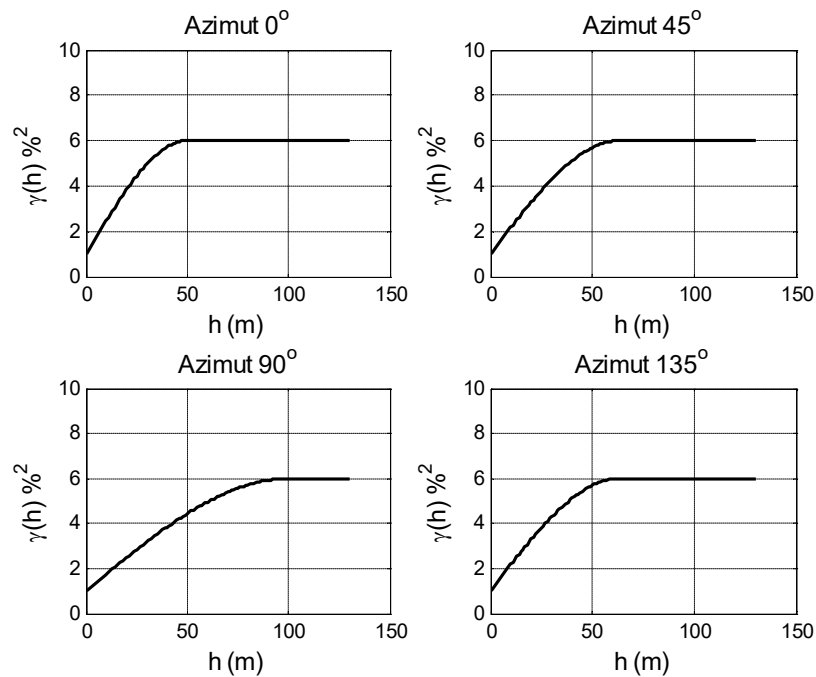
Les forages ne sont pas sur une grille régulière mais leur disposition est telle qu'on retrouve en moyenne un forage par cellule de 20 m x 10 m et qu'on peut considérer l'emplacement du forage dans chaque cellule comme étant choisi au hasard.

10 pts a) Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne sur la zone étudiée si on dispose de 57 forages?

2 pts b) À partir de quelle distance deux points peuvent-ils être considérées comme non-corrélés selon l'azimut 40° ?

Question 4 (12 points)

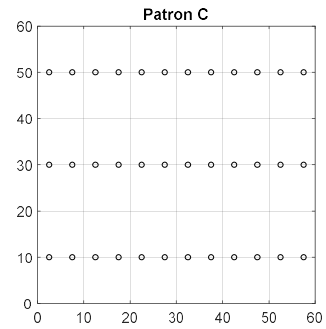
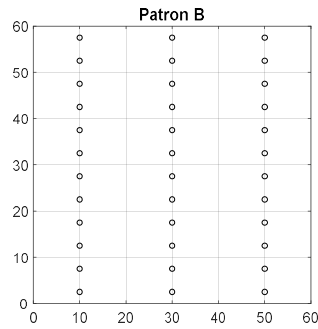
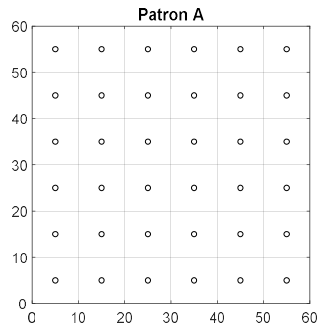
Soit les variogrammes suivants tracés selon 4 directions différentes.



- 6 pts a) Décrivez le modèle de variogramme 2D (en spécifiant tous les paramètres du modèle, type, etc.), que l'on peut ajuster à ces variogrammes directionnels.

Question 4 (suite)

6 pts *b) Compte tenu des variogrammes de la question a) et du modèle 2D ajusté, lequel des patrons d'échantillonnage suivant serait à déconseiller si l'objectif est d'estimer la teneur moyenne du bloc de 60 m x 60 m avec le plus de précision ? Justifiez à l'aide de l'abaque approprié. Note : chaque patron possède le même nombre d'observations, soit 36.*



Question 5 (12 points)

Répondez par vrai ou faux (aucune justification requise; 1 point par bonne réponse, -0.5 par mauvaise réponse et 0 pour une absence de réponse). Dans tous les cas, supposez qu'un modèle admissible de variogramme est utilisé.

#	Énoncé	Vrai	Faux
1	Dans une validation croisée (des résultats d'un krigeage), on peut toujours ajuster les paramètres du variogramme pour que l'écart-type des résidus normalisés soit exactement 1.		
2	On peut effectuer une estimation équivalente à la méthode polygonale par krigeage ordinaire en limitant le voisinage utilisé pour le krigeage à une seule observation.		
3	On peut effectuer une estimation équivalente à une moyenne locale des données en effectuant un krigeage ordinaire avec voisinage local et un variogramme effet de pépite pur.		
4	La variance de krigeage ordinaire ne peut jamais être supérieure au palier du variogramme.		
5	La variance de krigeage ordinaire n'est jamais nulle en raison de la présence du multiplicateur de Lagrange		
6	Comme il peut y avoir des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des teneurs estimées par krigeage qui soient négatives.		
7	Comme il y a des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des variances de krigeage négatives.		
8	Pour les modèles de covariance vus au cours, la variance de dispersion $D^2(v V)$ (avec v inclus dans V) est toujours inférieure à $\text{Var}(Z_v)$.		
9	La détermination précise du palier du variogramme est requise pour calculer correctement les variances de dispersion $D^2(v V)$ lorsque « V » est grand par rapport à la portée du variogramme.		
10	Avec un modèle sphérique de variogramme, plus l'effet de pépite est important, plus l'effet d'écran du krigeage est prononcé.		
11	Plus l'effet de pépite est important, plus le krigeage montre de fortes discontinuités aux points échantillons.		
12	Le krigeage ordinaire est sans biais, et ce, indépendamment du fait que l'on ait, ou pas, le bon modèle de variogramme.		

Question 6 (14 points)

Une mine de fer charge son minerai par bateau. Chaque bateau peut transporter 30 000 t de minerai représentant à la mine un bloc de 30 m x 30 m x 10 m. La compagnie minière doit payer une pénalité de 5 \$/t sur son minerai si celui-ci montre une teneur en phosphore dépassant 1 %. Le variogramme ponctuel 3D du phosphore est sphérique isotrope avec une portée de 200 m, $C_0 = 0.3 \text{ \%}^2$, $C = 0.2 \text{ \%}^2$.

Afin de minimiser le risque de devoir payer la pénalité, la mine considère trois alternatives d'exploitation de son gisement :

A1: Exploiter le bloc 30 m x 30 m x 10 m à partir d'un seul bloc;

A2: Exploiter le même tonnage avec deux blocs séparés spatialement d'une distance supérieure à la portée de 200 m. On considère alors que chaque bloc sera de dimension 21.2 m x 21.2 m x 10 m;

A3 : Utiliser une pile d'homogénéisation d'une capacité de 270 000 t correspondant à la mine à un bloc de 90 m x 90 m x 10 m. On considère négligeable la variabilité intra-pile.

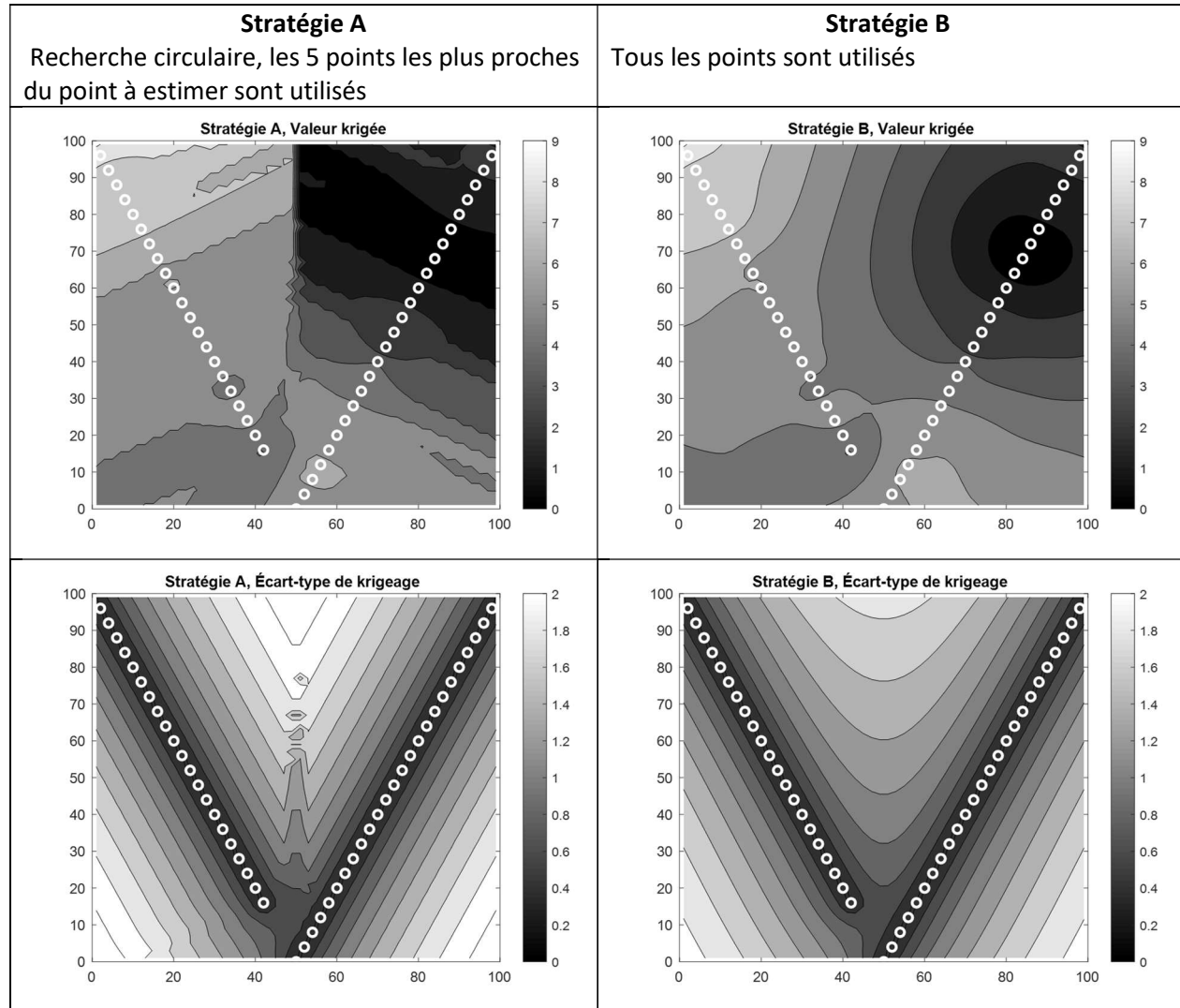
9 pts *a) Calculez la variance de la teneur en phosphore du chargement dans le bateau selon les trois alternatives (sur un long horizon de temps et en considérant que le gisement est grand par rapport à la portée).*

Question 6 (suite)

- 5 pts *b) Si la teneur moyenne du gisement de fer en phosphore est de 0.4 % et en supposant une distribution normale de la teneur moyenne du minerai dans un bateau, quelle est la probabilité que la mine doive payer une pénalité pour le minerai dans un bateau si elle exploite selon la méthode ayant fournie la plus faible variance en a) ? (Si vous n'avez pu répondre à la question a) utilisez comme variance 0.02 %²).*

Question 7 (10 points)

On vous présente les cartes de krigeage et d'écart-type de krigeage obtenues avec un même modèle de variogramme et les mêmes données provenant de deux forages. Les données sont représentées par les cercles blancs sur les figures. Les krigeages sont effectués selon deux stratégies différentes pour la définition du voisinage à utiliser.



Commentez les résultats obtenus. Quelle stratégie recommanderiez-vous? Justifiez.

Question 8 (12 points)

Le tableau suivant montre la position de trois points x_1 , x_2 et x_3 utilisés pour estimer la teneur au point x_0 ainsi que les poids utilisés pour l'estimation. Le modèle est sphérique avec portée 25 m et $C=10\text{ \%}^2$ et un effet de pépité $C_0=3\text{ \%}^2$.

Points	Coord est (m)	Coord nord (m)	Poids
x_1	0	0	1/3
x_2	20	0	1/3
x_3	0	20	1/3
x_0	10	10	-

10 pts a) Calculez la variance d'estimation de la teneur au point x_0

2 pts b) Si l'effet de pépité était supérieur à $3\text{ \%}^2$, les autres paramètres et les poids demeurant inchangés, quel serait l'effet sur la variance d'estimation (augmente, diminue, ou demeure inchangée) ?

Fin de l'examen

Corrigé

Q1 a) $\text{Var}(Z_v) = C(1 - F(10/100, 20/100)) = 4 * (1 - 0.17) = 3.32 \text{ } \mu\text{m}^2$

Comme les valeurs estimées montrent une variance supérieure à celle des blocs qu'ils estiment on est certain qu'il y a un biais conditionnel.

b) On va récupérer une teneur plus faible que prévue => on va faire moins de profits que prévus.

Q2- a) La seule covariance à évaluer est $A = \text{Cov}(Z_1, Z_4)$. On a $h = (100 + 225)^{0.5} = 18 \text{ m}$

l'azimut défini par la paire Z_1 - Z_4 est $\text{atan}(10/15) = 33.7 \text{ deg}$

l'angle theta avec ag est $33.7 - 22 = 11.7$

a_{theta} est $35 * 15 / \sqrt{35^2 \sin(11.7)^2 + 15^2 \cos(11.7)^2} = 32.2 \text{ m}$

$A = 65(1 - (1.5(18/32.2) - 0.5(18/32.2)^3)) = 16.2 \text{ ppm}^2$

$B = 18.597$ par symétrie

$C = 90$; $D = 1$; $E = 0$; $F = 1$

b) Aucun changement puisque le système de krigeage ne dépend pas des teneurs.

c) On doit augmenter les deux premiers termes diagonaux dans la matrice de gauche de $C_0 = 25$, donc deviennent 115 ppm^2

d) les points étant moins précis ils recevront un poids plus faibles alors que les 2 autres points vont recevoir un poids plus élevé.

Q3- a) $\text{Var}(e_g) = D^2(\cdot | v) / 57 = [5 + 40 F(20/20, 10/20) + 20 F(20/80, 10/80)] / 57 = [5 + 40(0.55) + 20(0.15)] / 57 = 0.53 \text{ ppm}^2$

b) 80 m i.e la portée maximale des modèles qui se combinent

Q4- a) modèle sphérique avec anisotropie géométrique. Les portées principales sont selon 90 ($a_g = 100 \text{ m}$) et 0 ($a_p = 50 \text{ m}$), avec un effet de pépité de $1\% \mu\text{m}^2$ et $C = 5 \text{ } \mu\text{m}^2$.

b) Il suffit de regarder $\text{var}(e)$ pour une cellule puisque pour l'ensemble c'est $(C_0 + C F(v)) / 36$

Avec $A : F(10/100, 10/50)$ avec $B : F(20/100, 5/50)$ et avec $C : F(5/100, 20/50)$. Les valeurs pour A et B sont les mêmes (0.058 environ) alors que pour C c'est 0.1. Donc on déconseille le patron C.

Q5- V V V F F V F V V F V V

Q6- a) On calcule les variances de bloc 3D pour chaque scenario

$A_1 : 0.2(1 - F(10/200, 30/200)) = 0.2(1 - 0.13) = 0.174 \text{ } \mu\text{m}^2$

$A_2 : 0.2(1 - F(10/200, 21.2/200)) / 2 = 0.2(1 - 0.09) / 2 = 0.09 \text{ } \mu\text{m}^2$

$A_3 : 0.2(1 - F(10/200, 90/200)) = 0.2(1 - 0.35) = 0.13 \text{ } \mu\text{m}^2$

b) on a $(Z_v - m) / \sigma_v \sim N(0, 1)$ et $P(Z_v > 1) = P((Z_v - 0.4) / 0.3 > (1 - 0.4) / 0.3) = P(N(0, 1) > 2) \Rightarrow 1 - 0.977 = 0.023$ ou 2.3% de chances

Q7- On a clairement une discontinuité de voisinage avec la stratégie A. Les points à gauche sont estimés avec les données du forage de gauche, ceux à droite avec les données du forage de droite. L'écart-type de krigeage sur les figures du bas montre le caractère défavorable de ces configurations (valeurs plus élevées à gauche qu'à droite). Au contraire la stratégie B ne montre pas de discontinuités. Il faut recommander cette stratégie.

Q8- a) Selon les distances on a $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \text{Cov}(Z_1, Z_3) = 10(1 - (1.5(20/25) - 0.5(20/25)^3)) = 0.56$

$h(Z_1, Z_3) = 28 \text{ m} > 25 \text{ m} \Rightarrow C(Z_1, Z_3) = 0$

$C(Z_i, Z_i) = 13$ pour $i = 1, 2, 3$

$h(Z_i, Z_0) = 200^{0.5} = 14.14 \text{ m}$

et $\text{Cov}(Z_1, Z_0) = \text{Cov}(Z_2, Z_0) = \text{Cov}(Z_3, Z_0) = 10(1 - (1.5(14.14/25) - 0.5(14.14/25)^3)) = 2.42$

Finalement $\text{Var}(e) = 13 + (3 * 13 + 4 * 0.56) / 9 - 2(3 * 2.42) / 3 = 12.74$

b) comme les données seraient moins précises, la variance d'estimation ne peut qu'augmenter. On le voit clairement dans la formule puisque C_0 intervient uniquement du côté des termes positifs.
